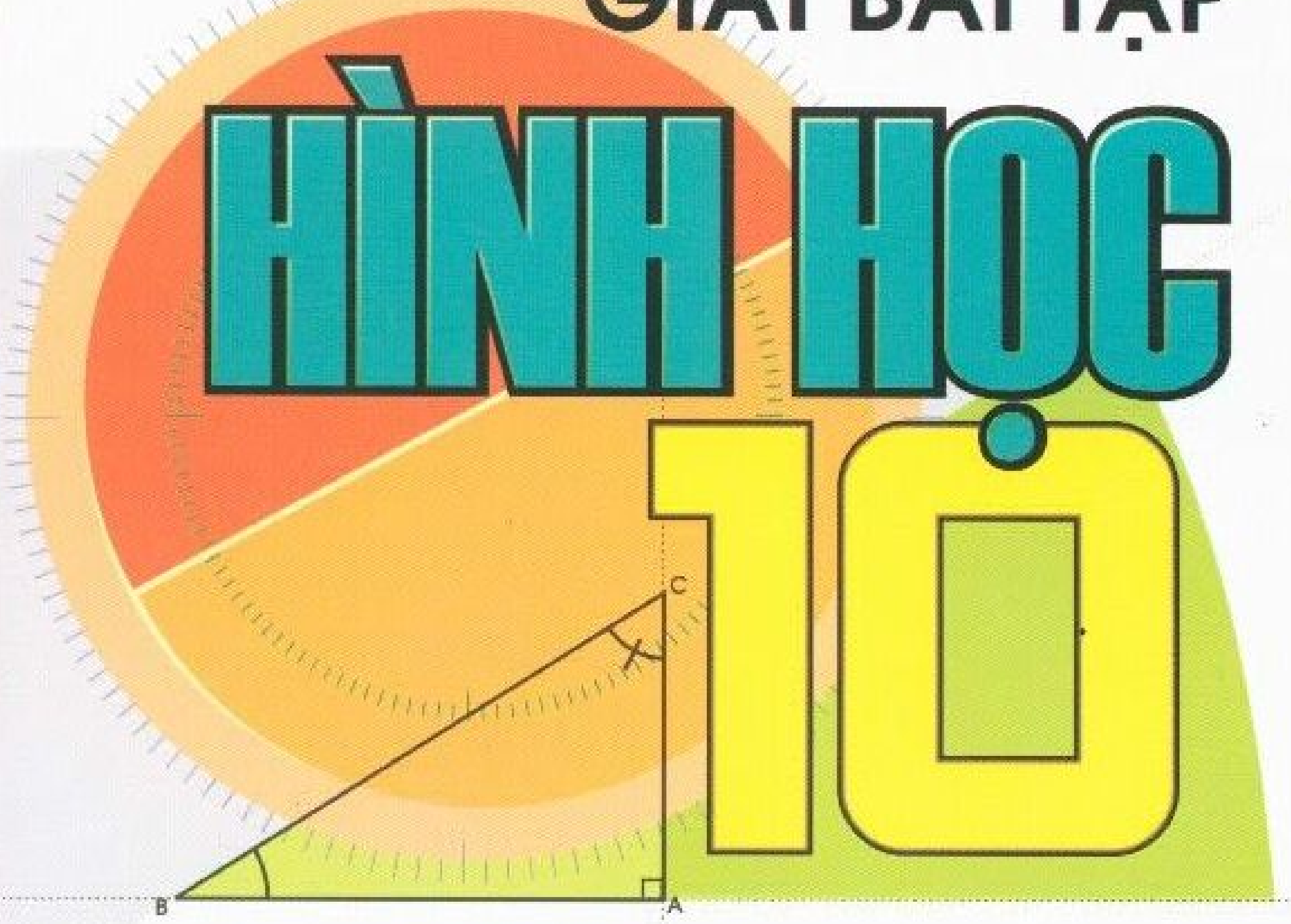
NGUYỄN VŨ THANH - TRẦN MINH CHIẾN

GIẢI BÀI TẬP
HÌNH HỌC
10



$\sin B = \cos C$; $\sin C = \cos B$;
$\tan B = \cot C$; $\tan C = \cot B$

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

NGUYỄN VŨ THANH-TRẦN MINH CHIẾN

Giải bài tập
HÌNH HỌC 10
NÂNG CAO

NHÀ XUẤT BẢN
ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

Đơn vị liên kết :
Công ty Sách hoa hồng

Lời nói đầu

Quyển sách ***GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 NÂNG CAO*** *được biên soạn theo sách giáo khoa* ***Hình học 10*** *dùng cho Ban Khoa học Tự nhiên và được trình bày như sau:*

- ***Tóm tắt giáo khoa.***
- ***Nêu phương pháp và giải bài tập theo sách giáo khoa.***
- ***Bổ sung một số bài tập làm thêm.***

Cuối sách có bổ sung một số câu hỏi trắc nghiệm để học sinh làm quen với cách làm bài trắc nghiệm.

Với cách trình bày như trên, chúng tôi hi vọng quyển sách này sẽ là tài liệu tham khảo tốt trong quá trình học tập, rèn luyện và ôn tập ở nhà.

Quý thầy cô và quý phụ huynh có thể xem quyển sách này như tài liệu tham khảo thêm.

Chúng tôi mong đón nhận ý kiến xây dựng từ quý độc giả.

CÁC TÁC GIẢ

Chương I. VECTƠ

§1. CÁC ĐỊNH NGHĨA

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vectơ

- Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, nghĩa là trong hai điểm mút của đoạn thẳng, đã chỉ rõ điểm nào là điểm đầu, điểm nào là điểm cuối.
- Kí hiệu vectơ AB là $\overrightarrow{AB}$ hoặc $\vec{a}, \vec{b}, \ldots$
- Vectơ có điểm đầu và điểm cuối trùng nhau gọi là vectơ – không, kí hiệu là $\vec{0}$.

2. Hai vectơ cùng phương, cùng hướng

- Đường thẳng qua AB gọi là giá của vectơ $\overrightarrow{AB}$.
- Hai vectơ gọi là cùng phương nếu chúng có giá song song hoặc trùng nhau.

  Vectơ–không $\vec{0}$ cùng phương với mọi vectơ.
- Hai vectơ cùng phương thì chúng có thể cùng hướng, hoặc chúng ngược hướng.

3. Hai vectơ bằng nhau

- Khoảng cách giữa hai điểm A, B gọi là độ dài của vectơ $\overrightarrow{AB}$ và kí hiệu $|\overrightarrow{AB}| = AB$.
- Độ dài của vectơ $\vec{a}$ được kí hiệu là $|\vec{a}|$.
- Hai vectơ gọi là bằng nhau nếu chúng cùng hướng và cùng độ dài.
- Nếu hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau ta viết $\vec{a} = \vec{b}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. Vectơ khác với đoạn thẳng như thế nào?

● ***Trả lời:*** Vectơ là một đoạn thẳng có hướng, điểm đầu gọi là gốc, và điểm cuối gọi là ngọn.

2. Các khẳng định sau đây có đúng không?

a) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng phương.

b) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác vectơ–không $\vec{0}$ thì cùng phương.

c) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba thì cùng hướng.

d) Hai vectơ cùng phương với một vectơ thứ ba khác vectơ–không $\vec{0}$ thì cùng hướng.

e) Hai vectơ ngược hướng với một vectơ khác vectơ–không $\vec{0}$ thì cùng phương.

f) Điều kiện cần và đủ để hai vectơ bằng nhau là chúng có độ dài bằng nhau.

- ***Trả lời***

a) Sai vì hai vectơ không cùng phương với nhau nhưng lại cùng phương với vectơ $\vec{0}$.

b) Đúng.

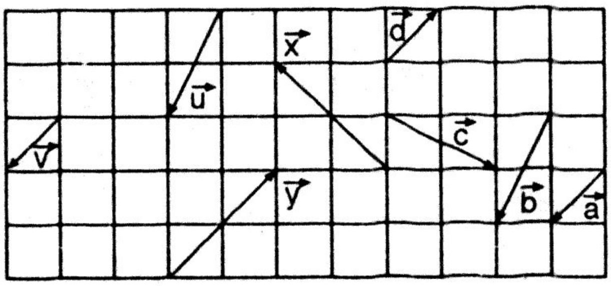
c) Sai vì hai vectơ không cùng hướng nhưng chúng cùng hướng với vectơ $\vec{0}$.

d) Đúng.

e) Đúng.

f) Sai vì hai vectơ có độ dài bằng nhau nhưng không chắc cùng hướng với nhau.

3. *Trong hình bên, hãy chỉ ra các vectơ cùng phương, các vectơ cùng hướng và các vectơ bằng nhau.*



- ***Trả lời***

Các vectơ cùng phương: $\vec{a}, \vec{d}, \vec{v}, \vec{y}$

Các cặp vectơ cùng hướng: $\vec{a}, \vec{v}$; $\vec{y}, \vec{d}$; $\vec{b}, \vec{u}$

Các cặp vectơ bằng nhau : $\vec{a} = \vec{v}$; $\vec{b} = \vec{u}$

4. *Gọi C là trung điểm của đoạn thẳng AB. Các khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) $\overrightarrow{AC}$ *và* $\overrightarrow{BC}$ *cùng hướng*

b) $\overrightarrow{AC}$ *và* $\overrightarrow{AB}$ *cùng hướng*

c) $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{BC}$ *ngược hướng*

d) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$

e) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BC}|$

f) $|\overrightarrow{AB}| = 2|\overrightarrow{BC}|$

- ***Trả lời.*** a) Sai, b) Đúng, c) Đúng,
d) Sai, e) Đúng, f) Đúng.

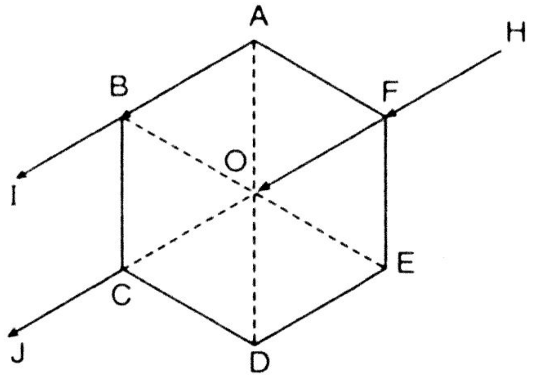
5. *Cho lục giác đều ABCDEF. Hãy vẽ các vectơ bằng vectơ* $\overrightarrow{AB}$ *và ta có:*

a) Các điểm đầu là B, F, C.

b) Các điểm cuối là F, D, C.

- ***Giải.*** *a)* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BI} = \overrightarrow{FO} = \overrightarrow{CJ}$.

  b) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HF} = \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{OC}$.



C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho tam giác ABC nội tiếp đường tròn tâm O. Gọi H là trực tâm của tam giác ABC.*

   a) Gọi D là điểm đối xứng của A qua O. Chứng minh: $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{HC}$.

   b) Gọi K là trung điểm của AH và I là trung điểm của BC. Chứng minh: $\overrightarrow{OK} = \overrightarrow{IH}$ *và* $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{KH}$

   - ***Hướng dẫn.*** Chứng minh các tứ giác BDCH và KOIH là hình bình hành.

2. *Cho hình vuông ABCD tâm O. Trong các vectơ có điểm đầu và điểm cuối là hai trong các điểm A, B, C, D, O.*

   a) Hãy tìm các vectơ bằng với vectơ $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}$

   b) Hãy tìm các vectơ có độ dài bằng độ dài các vectơ $\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{OC}$.

3. *Gọi G là trọng tâm của tam giác ABC. Vẽ* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{GB}$.

   Chứng minh $\overrightarrow{GE} = \vec{0}$.

   - ***Hướng dẫn.*** Áp dụng tính chất trọng tâm của tam giác.

§2. TỔNG HAI VECTƠ

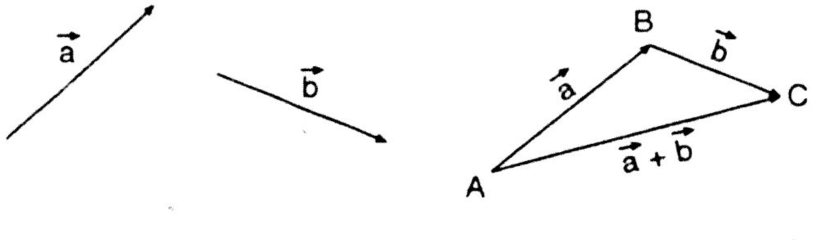
A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa tổng của hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Lấy một điểm A nào đó rồi xác định các điểm B và C sao cho: $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{BC} = \vec{b}$. Khi đó vectơ $\overrightarrow{AC}$ được gọi là tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$.

Kí hiệu: $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$.

Phép lấy tổng của hai vectơ gọi là phép cộng vectơ.



2. Tính chất

a) Tính chất giao hoán : $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$

b) Tính chất kết hợp : $\left(\vec{a}+\vec{b}\right)+\vec{c}=\vec{a}+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)$

c) Tính chất của vectơ–không : $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$.

3. Các quy tắc

a) Quy tắc ba điểm:

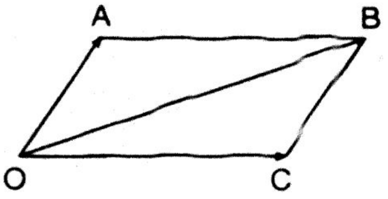
Với ba điểm bất kì M, N, P ta có:

$$\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}=\overrightarrow{MP}$$

b) Quy tắc hình bình hành:

Nếu OABC là hình bình hành thì ta có:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}$$



4. Chú ý

a) Nếu M là trung điểm đoạn AB thì $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}=\vec{0}$.

b) Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

6. *Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD}$ thì $\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$.*

- ***Giải.*** Áp dụng hệ thức ba điểm ta có:

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{CD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{BD} \Rightarrow \overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BD}$$

7. *Tứ giác ABCD là hình gì nếu $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{BC}|$?*

- ***Giải.*** Từ $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ suy ra tứ giác ABCD là hình bình hành, còn AB = BC thì tứ giác ABCD là hình bình hành có hai cạnh lên tiếp bằng nhau nên ABCD là hình thoi.

8. *Cho bốn điểm bất kì M, N, P, Q. Chứng minh các đẳng thức sau:*

a) $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MQ}$

b) $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{NQ}$

c) $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}$

- ***Giải***

a) Ta có: $\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{NP}\right)+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{MQ}$

b) Ta có: $\overrightarrow{NP}+\overrightarrow{MN}=\left(\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QP}\right)+\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MQ}\right)+\left(\overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QN}\right)=\overrightarrow{QP}+\overrightarrow{MQ}\ \left(\text{vì } \overrightarrow{NQ}+\overrightarrow{QN}=\vec{0}\right)$$

c) Ta có: $\overrightarrow{MN}+\overrightarrow{PQ}=\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{QN}\right)+\left(\overrightarrow{PN}+\overrightarrow{NQ}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}\right)+\left(\overrightarrow{QN}+\overrightarrow{NQ}\right)=\overrightarrow{MQ}+\overrightarrow{PN}\ \left(\text{do } \overrightarrow{QN}+\overrightarrow{NQ}=\vec{0}\right)$$

9. *Các hệ thức sau đây đúng hay sai (với mọi $\vec{a}$ và $\vec{b}$)*

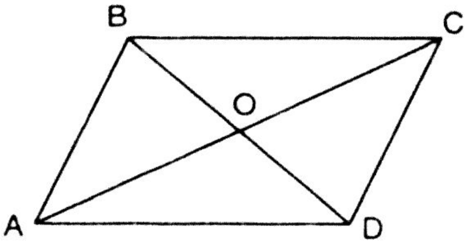
a) $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}|+|\vec{b}|$ *b)* $|\vec{a}-\vec{b}|\geq|\vec{a}|-|\vec{b}|$

- ***Giải.*** a) Sai lấy $\vec{a}, \vec{b}$ không cùng phương thì $|\vec{a}+\vec{b}|<|\vec{a}|+|\vec{b}|$

b) Đúng. Áp dụng: $|\vec{a}+\vec{b}|\leq|\vec{a}|+|\vec{b}|$

Ta có: $|\vec{a}-\vec{b}|+|\vec{b}|\geq|\vec{a}-\vec{b}+\vec{b}|=|\vec{a}|\Rightarrow|\vec{a}-\vec{b}|\geq|\vec{a}|-|\vec{b}|$.

10. *Cho hình bình hành ABCD tâm O. Hãy điền vào chỗ trống (...) để được đẳng thức đúng.*



a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\ldots$ *b)* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\ldots$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\ldots$ *d)* $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\ldots$

e) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\ldots$

- ***Giải.*** a) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ (quy tắc hình bình hành)

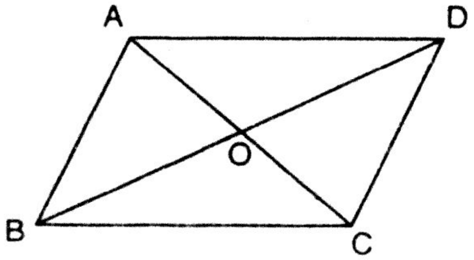
b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=\vec{0}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$ (quy tắc ba điểm)

d) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ (vì O là trung điểm của AC)

e) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}=\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}\right)+\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}\right)=\vec{0}+\vec{0}=\vec{0}$

11. *Cho hình bình hành ABCD tâm O. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*



a) $|\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}|=|\overrightarrow{BD}|$;

b) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}$

c) $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$;

d) $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$

- ***Giải.*** a) sai vì AC và BD chưa chắc bằng nhau.

b) Đúng vì $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}$

c) Sai vì $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CA}\right)+\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{DB}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\left(\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\right)\neq\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\ \left(\text{do } \overrightarrow{CA}+\overrightarrow{DB}\neq\vec{0}\right)$$

d) Đúng vì : $\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{AC}=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DC}\right)$

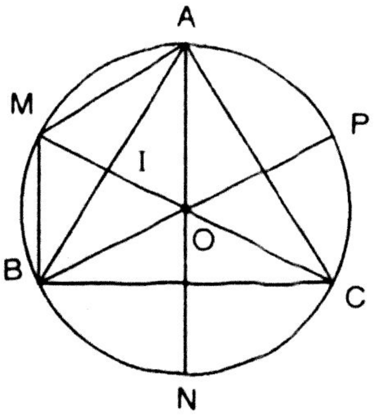
$$=\left(\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{AD}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DC}\right)=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$$

12. *Cho tam giác đều ABC nội tiếp đường tròn tâm O.*

a) Hãy xác định các điểm M, N, P sao cho :

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{ON}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OA}$$

b) Chứng minh rằng : $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$



- ***Giải***

a) Theo quy tắc hình bình hành: từ $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ suy ra tứ giác AOBM là hình bình hành. Gọi I là trung điểm AB thì OI = IM. O là trọng tâm tâm giác ABC nên OC = 2IO = OM.

Do đó O là trung điểm MC, tức MC là đường kính của đường tròn.

Tương tự ta cũng có : M, N, P thuộc đường tròn (O) sao cho CM, AN, BP là các đường kính của (O).

b) O là trung điểm của MC nên $\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

Mà $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ nên $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \vec{0}$

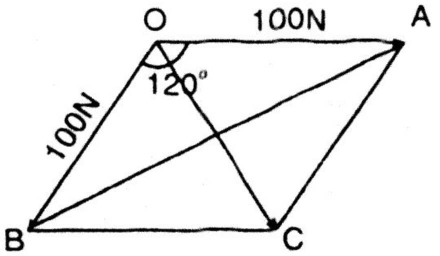
13. *Cho hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ cùng có điểm đặt tại O. Tìm cường độ lực tổng hợp của chúng trong các trường hợp sau :*

a) $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ đều có cường độ là 100N, góc hợp bởi $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ bằng 120^0

b) Cường độ của $\vec{F_1}$ là 40N, của $\vec{F_2}$ là 30N và góc giữa $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ bằng 90^0

- ***Giải***

a) Vẽ hình bình hành AOBC thì AOBC là hình thoi.



Ta có $\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$

OC là phân giác góc $\widehat{AOB}$

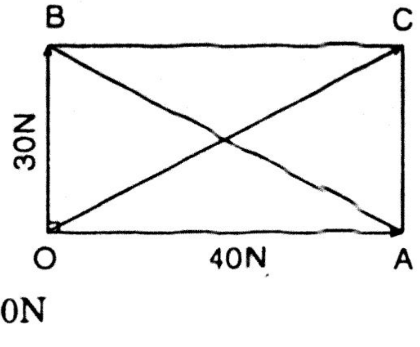
nên $\widehat{AOC} = 60^0$

do đó tam giác AOC đều.

Suy ra OC = OA $\Rightarrow |\overrightarrow{OC}| = 100N$

Vậy cường độ lúc tổng hợp của $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ là 100N.

b) Vẽ hình chữ nhật AOBC thì:



$$\vec{F_1} + \vec{F_2} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

Ta có : OC = AB

$$= \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{2500} = 50$$

Vậy cường độ lực tổng hợp của $\vec{F_1}$ và $\vec{F_2}$ là 50N

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho hình bình hành ABCD và M là điểm tuỳ ý. Chứng minh rằng :*

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MD}$$

- ***Hướng dẫn.*** Áp dụng quy tắc ba điểm.

2. *Cho lục giác điều ABCDEF và M tuỳ ý. Chứng minh rằng :*

$$\vec{MA} + \vec{MC} + \vec{ME} = \vec{MB} + \vec{MD} + \vec{MF}$$

- ***Hướng dẫn:*** $\vec{MA} + \vec{MC} + \vec{ME} = (\vec{MB} + \vec{BA}) + (\vec{MD} + \vec{DC}) + (\vec{MF} + \vec{FE})$

Chứng minh: $\vec{BA} + \vec{DC} + \vec{FE} = \vec{0}$

3. *Cho tam giác ABC. Vẽ về phía ngoài tam giác các hình bình hành ABMN, BCPQ, CARS.*

Chứng minh : $\vec{QM} + \vec{NR} + \vec{SP} = \vec{0}$

- ***Hướng dẫn:*** $\vec{QM} = \vec{QB} + \vec{BM}; \vec{NR} = \vec{NA} + \vec{AR}; \vec{SP} = \vec{SC} + \vec{CP}$

4. *Cho hai lực $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ đặt tại điểm O đều có cường độ là 100N, góc hợp bởi $\vec{F_1}, \vec{F_2}$ bằng 60^0. Tìm cường độ lực tổng hợp của chúng.*

- ***Đáp số:*** $100\sqrt{3}$ N

5. *Tìm điều kiện giữa $\vec{a}$ và $\vec{b}$ để có:* $|\vec{a} + \vec{b}| = |\vec{a}| + |\vec{b}|$.

- ***Đáp số:*** $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng.

§3. HIỆU CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vectơ đối của một vectơ

- Nếu tổng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là vectơ – không thì ta nói $\vec{a}$ là vectơ đối của $\vec{b}$ hay $\vec{b}$ là vectơ đối của $\vec{a}$.
- Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ ký hiệu là $-\vec{a}$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = (-\vec{a}) + (\vec{a}) = \vec{0}$$

- Vectơ đối của vectơ $\vec{a}$ là vectơ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$ và có cùng độ dài với vectơ $\vec{a}$.
- Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$.

2. Hiệu của hai vectơ

- Hiệu của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu $\vec{a} - \vec{b}$ là tổng của vectơ $\vec{a}$ và vectơ đối của vectơ $\vec{b}$ tức là $\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

  Phép lấy hiệu của hai vectơ gọi là phép trừ vectơ.
- Quy tắc về hiệu vectơ :

  $\vec{MN}$ là một vectơ đã cho và O là điểm tuỳ ý.

  Ta có: $\vec{MN} = \vec{ON} - \vec{OM}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

14. *Trả lời các câu hỏi sau đây:*

a) Vectơ đối của vectơ $-\vec{a}$ *là vectơ nào ?*

b) Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ *là vectơ nào ?*

c) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ *là vectơ nào ?*

- ***Trả lời.*** a) Vectơ đối của vectơ $-\vec{a}$ là vectơ $-(-\vec{a}) = \vec{a}$

  b) Vectơ đối của vectơ $\vec{0}$ là vectơ $\vec{0}$

  c) Vectơ đối của vectơ $\vec{a} + \vec{b}$ là vectơ $-(\vec{a}+\vec{b}) = -\vec{a} - \vec{b}$

15. *Chứng minh các mệnh đề sau đây :*

a) Nếu $\vec{a}+\vec{b}=\vec{c}$ *thì* $\vec{a}=\vec{c}-\vec{b}, \vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$

b) $\vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

c) $\vec{a}-\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$

- ***Giải.*** a) Cộng hai vế cho vectơ đối của vectơ $\vec{b}$ ta có :

$$\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{b})=\vec{c}+(-\vec{b}) \Rightarrow \vec{a}=\vec{c}-\vec{b}$$

Cộng hai vế cho vectơ đối của vectơ ta có :

$$\vec{a}+\vec{b}+(-\vec{a})=\vec{c}+(-\vec{a}) \Rightarrow \vec{b}=\vec{c}-\vec{a}$$

b) Ta có : $\vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)+\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}$

Áp dụng câu a ta có : $\vec{a}-\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}-\vec{b}-\vec{c}$

c) Áp dụng câu a ta có :

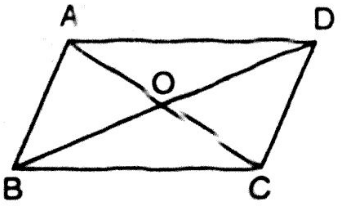
$$\vec{a}-\left(\vec{b}-\vec{c}\right)=\vec{a}-[\vec{b}+(-\vec{c})]=\vec{a}-\vec{b}-(-\vec{c})=\vec{a}-\vec{b}+\vec{c}$$

16. *Cho hình bình hành ABCD tâm O. Mỗi khẳng định sau đây đúng hay sai ?*

a) $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AB}$ *b)* $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$ *c)* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$

d) $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BD}$ *e)* $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}$

- ***Giải***



a) Sai vì $\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}\neq\overrightarrow{AB}$

b) Đúng vì $\overrightarrow{CO}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{BA}$

c) Sai vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}\neq\overrightarrow{AC}$

d) Sai vì $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{DB}\neq\overrightarrow{BD}$

e) Đúng vì $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{OD}$ và $\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}$ nên $\overrightarrow{CD}-\overrightarrow{CO}=\overrightarrow{BD}-\overrightarrow{BO}$

17. *Cho hai điểm A, B phân biệt :*

a) Tìm tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$

b) Tìm tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$

- ***Giải***

a) Nếu có điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ thì $A \equiv B$ (vô lí). Vậy tập hợp điểm O thỏa $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ là tập rỗng.

b) Ta có : $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow$ O là trung điểm đoạn AB.

Vậy tập hợp các điểm O sao cho $\overrightarrow{OA} = -\overrightarrow{OB}$ chỉ có một điểm chung duy nhất là trung điểm của đoạn AB.

18. *Cho hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng* $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

- ***Giải.*** Ta có: $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} = \overrightarrow{BA}$, mà $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$

Nên $\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DC} = \vec{0}$

19. *Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ *khi và chỉ khi trung điểm của hai đoạn thẳng AD và BC trùng nhau.*

- ***Giải***

a) Giả sử : $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ và I, J lần lượt là trung điểm của AD và BC.

Ta có : $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$; $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$

Ta có : $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ}$

Và $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{ID} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CJ}$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} = \left(\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID}\right) + \left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DC}\right) + \left(\overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{CJ}\right) = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{IJ} \Rightarrow \overrightarrow{IJ} = \vec{0} \Rightarrow I \equiv J$$

b) Ngược lại giả sử $I \equiv J$, tức $\overrightarrow{IA} + \overrightarrow{ID} = \vec{0}$ (1)

và $\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \vec{0}$ (2)

Lấy (1) trừ (2) ta được :

$$\left(\overrightarrow{IA} - \overrightarrow{IB}\right) + \left(\overrightarrow{ID} - \overrightarrow{IC}\right) = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \Rightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$$

20. *Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Chứng minh rằng :*

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}$$

- ***Giải***

Cách 1: Gọi O là điểm bất kì ta có :

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF} = \left(\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA}\right) + \left(\overrightarrow{OE} - \overrightarrow{OB}\right) + \left(\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OC}\right)$$

$$= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OC} \qquad (1)$$

$$\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\left(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\left(\overrightarrow{OF}-\overrightarrow{OA}\right)+\left(\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OB}\right)+\left(\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC} \quad (3)$$

Từ (1), (2) và (3) suy ra :

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}$$

Cách 2:

Áp dụng quy tắc ba điểm :

$$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{ED}\right)+\left(\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{FE}\right)+\left(\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{DF}\right)$$

$$=\left(\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD}\right)+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CD} \quad (4)$$

Mặt khác: $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FD}\right)+\left(\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{DE}\right)+\left(\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EF}\right)$

$$=\left(\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}\right)+\left(\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{DF}+\overrightarrow{FE}\right)=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE} \quad (5)$$

Từ (4) và (5) suy ra đpcm.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho bốn điểm A, B, C, D. Chứng minh rằng* $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$

2. *Cho hai vectơ khác* $\vec{0}$, $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$. *Tìm mối quan hệ giữa* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$.

Biết $|\vec{a}+\vec{b}|=|\vec{a}-\vec{b}|$

Đáp số : $\vec{a}\perp\vec{b}$

3. *Cho hình vuông ABCD cạnh a. Tìm độ dài các vectơ :*

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$; $\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BC}$ *và* $\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CD}$

4. *Cho tam giác ABC, xác định điểm I thỏa điều kiện:* $\overrightarrow{IA}-\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

§4. TÍCH CỦA MỘT VECTƠ VỚI MỘT SỐ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Tích của vectơ $\vec{a}$ với số thực k là một vectơ, kí hiệu là $k\vec{a}$ được xác định như sau:

- Nếu $k \geq 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ cùng hướng với vectơ $\vec{a}$.

  Nếu $k < 0$ thì vectơ $k\vec{a}$ ngược hướng với vectơ $\vec{a}$

- Độ dài vectơ $k\vec{a} = |k|.|\vec{a}|$.

Phép lấy tích của một vectơ với một số gọi là phép nhân vectơ với một số.

2. **Tính chất**

Với hai vectơ $\vec{a}, \vec{b}$ bất kì và mọi số thực k, l ta có :

- $k(l\vec{a}) = (kl)\vec{a}$
- $(k + l)\vec{a} = k.\vec{a} + l.\vec{a}$
- $k(\vec{a} + \vec{b}) = k.\vec{a} + k.\vec{b}$; $k(\vec{a} - \vec{b}) = k.\vec{a} - k.\vec{b}$
- $k.\vec{a} = \vec{0} \Leftrightarrow k = 0$ hoặc $\vec{a} = \vec{0}$

3. **Điều kiện để hai vectơ cùng phương**

Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a}$ ($\vec{a} \neq \vec{0}$) khi và chỉ khi có số k sao cho $\vec{b} = k.\vec{a}$.

Điều kiện cần và đủ để ba điểm phân biệt A, B, C thẳng hàng là có số k sao cho: $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$.

4. **Biểu thị một vectơ theo hai vectơ không cùng phương**

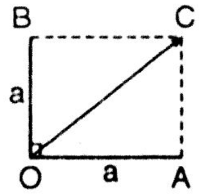
Cho hai vectơ không cùng phương $\vec{a}$ và $\vec{b}$. Khi đó mọi vectơ $\vec{x}$ đều có thể hiển thị được một cách duy nhất qua hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, nghĩa là có duy nhất cặp số m và n sao cho $\vec{x} = m\vec{a} + n\vec{b}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

21. *Cho tam giác vuông cân OAB với OA = OB = a. Hãy dựng các vectơ sau đây và tính độ dài của chúng :*

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB};\quad \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB};\quad 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB};\quad \frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2{,}5\overrightarrow{OB};\quad \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB};$$

- ***Giải.*** Vẽ hình vuông AOBC ta có :



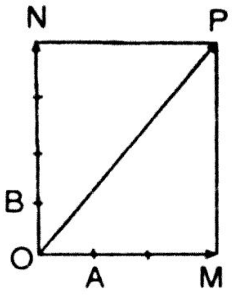
$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$$

$$\Rightarrow\quad |\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = a\sqrt{2}$$

$$\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{BA}$$

$$\Rightarrow\quad |\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{BA}| = a\sqrt{2}$$

Gọi M, N là điểm thỏa $\overrightarrow{OM} = 3\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{ON} = 4\overrightarrow{OB}$.



Vẽ hình chữ nhật MONP thì:

$$\overrightarrow{OM} + \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} \Rightarrow 3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OP}$$

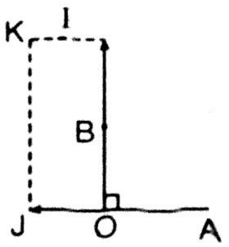
$$\Rightarrow\quad |3\overrightarrow{OA} + 4\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OP}|$$

$$= \sqrt{OM^2 + ON^2} = \sqrt{9a^2 + 16a^2} = 5a$$

Tương tự : $\left|\frac{21}{4}\overrightarrow{OA} + 2,5\overrightarrow{OB}\right| = \sqrt{\left(\frac{21}{4}a\right)^2 + \left(\frac{5}{2}a\right)^2} = \frac{\sqrt{541}}{4}a$

Gọi I, J là điểm thỏa: $\overrightarrow{OI} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OJ} = -\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}$

Vẽ hình chữ nhật IOJK thì:



$$\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OK} = \frac{11}{4}\overrightarrow{OA} + \left(-\frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right) = \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{OK}$$

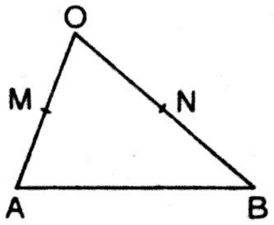
$$\Rightarrow \left|\frac{11}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{3}{7}\overrightarrow{OB}\right| = |\overrightarrow{OK}| = \sqrt{\left(\frac{11}{4}a\right)^2 + \left(\frac{3}{7}a\right)^2} = \frac{\sqrt{6073}}{28}a$$

22. *Cho tam giác OAB. Gọi M, N lần lượt là trung điểm hai cạnh OA và OB. Hãy tìm những số m, n thích hợp trong các đẳng thức sau đây :*

$\overrightarrow{OM} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

$\overrightarrow{AN} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{MB} = m\overrightarrow{OA} + n\overrightarrow{OB}$

- ***Giải.*** Ta có : $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + 0.\overrightarrow{OB}$



$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = \left(-\frac{1}{2}\right)\overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (-1)\ \overrightarrow{OA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}$$

$$\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{OA} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$$

23. *Gọi M và N lần lượt là trung điểm các đoạn thẳng AB và CD. Chứng minh rằng :* $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

- ***Giải.*** Áp dụng quy tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}\right) + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + \left(\overrightarrow{NC} + \overrightarrow{ND}\right) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}$$

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} = \left(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{ND}\right) + \left(\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NC}\right)$$

$$= 2\overrightarrow{MN} + (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{BM}) + \left(\overrightarrow{ND} + \overrightarrow{NC}\right) = 2\overrightarrow{MN} + \vec{0} + \vec{0} = 2\overrightarrow{MN}$$

Vậy $2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

24. *Cho tam giác ABC và điểm G.*

a) Chứng minh rằng nếu $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \vec{0}$ *thì G là trọng tâm tam giác ABC.*

b) Chứng minh rằng nếu có điểm O sao cho $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$ *thì G là trọng tâm tam giác ABC.*

● ***Giải***

a) Gọi G_1 là trọng tâm tam giác ABC ta có: $\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$

Từ $\qquad \overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

suy ra $\qquad \overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{GG_1}+\overrightarrow{G_1C}=\vec{0}$

$$\Rightarrow \quad 3\overrightarrow{GG_1}+\left(\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}\right)=\vec{0} \Rightarrow 3\overrightarrow{GG_1}=\vec{0} \Rightarrow G\equiv G_1$$

Vậy G là trọng tâm tam giác ABC.

b) Gọi G_1 là trọng tâm tam giác ABC ta có :

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)$$

$$=\frac{1}{3}\left(3\overrightarrow{OG_1}+\overrightarrow{G_1A}+\overrightarrow{G_1B}+\overrightarrow{G_1C}\right)=\overrightarrow{OG_1}\Rightarrow G\equiv G_1$$

Vậy G là trọng tâm tam giác ABC.

25 *Gọi G là trọng tâm tam giác ABC. Đặt* $\vec{a}=\overrightarrow{GA}$, $\vec{b}=\overrightarrow{GB}$. *Hãy biểu thị mỗi vectơ* $\overrightarrow{AB},\overrightarrow{GC},\overrightarrow{BC},\overrightarrow{CA}$ *qua các vectơ* $\vec{a}$ *và* $\vec{b}$.

● ***Giải.*** Vì G là trọng tâm tam giác nên $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

Ta có : $\quad \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}-\overrightarrow{GA}=\vec{b}-\vec{a}=-\vec{a}+\vec{b}$

$\overrightarrow{GC}=-\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}$

$\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{GC}-\overrightarrow{GB}=-\vec{a}-\vec{b}-\vec{b}=-\vec{a}-2\vec{b}$

$\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{GA}-\overrightarrow{GC}=\vec{a}+\vec{a}+\vec{b}=2\vec{a}+\vec{b}$

26 *Chứng minh rằng nếu G và G' lần lượt là trọng tâm tam giác ABC và A'B'C' thì* $3\overrightarrow{GG'}=\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}$. *Từ đó hãy suy ra điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau.*

● ***Giải.*** G là trọng tâm tam giác ABC nên ta có: $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$

G' là trọng tâm tam giác A'B'C' nên ta có: $\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}=\vec{0}$

Áp dụng quy tắc ba điểm ta có :

$$\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\left(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'A'}\right)+\left(\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'B'}\right)+\left(\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GG'}+\overrightarrow{G'C'}\right)$$

$$=-\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}\right)+3\overrightarrow{GG'}+\left(\overrightarrow{G'A'}+\overrightarrow{G'B'}+\overrightarrow{G'C'}\right)=3\overrightarrow{GG'}$$

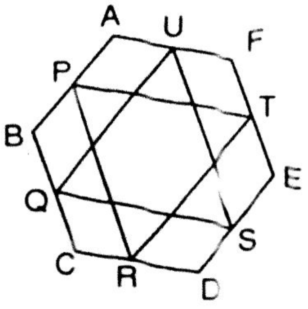
⇒ Điều kiện cần và đủ để hai tam giác ABC và A'B'C' có trọng tâm trùng nhau là : $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\vec{0}$

27 *Cho lục giác ABCDEF. Gọi P, Q, R, S, T, U lần lượt là trung điểm các cạnh AB, BC, CD, DE, EF, FA. Chứng minh rằng hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.*

● ***Giải.*** Ta có:

ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
TRUNG TÂM THÔNG TIN THƯ VIỆN
LC/ 2994

$$\overrightarrow{PQ}+\overrightarrow{RS}+\overrightarrow{TU}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}+\frac{1}{2}\overrightarrow{CE}+\frac{1}{2}\overrightarrow{EA}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CE}+\overrightarrow{EA}\right)=\vec{0}$$



Áp dụng kết quả bài 26 thì hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau.

Cách khác : Ta có thể giải bài 27 trực tiếp sau đây:

Lấy O bất kì và gọi K,G lần lượt là trọng tâm tam giác PRT và QSU ta có :

$$3\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{OI}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)\qquad(1)$$

$$3\overrightarrow{OK}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OS}+\overrightarrow{OU}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}\right)+\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OF}+\overrightarrow{OA}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OE}+\overrightarrow{OF}\right)\qquad(2)$$

Từ (1) và (2) suy ra $\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OK}$ tức $G\equiv K$

Vậy hai tam giác PRT và QSU có trọng tâm trùng nhau :

28. Cho tứ giác ABCD. Chứng minh rằng :

a) Có một điểm G duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$ Điểm G như thế gọi là trọng tâm của bốn điểm A, B, C, D.

Tuy nhiên, người ta vẫn quen gọi G là trọng tâm của tứ giác ABCD.

b) Trọng tâm G là trung điểm của các đoạn thẳng nối trung điển hai cạnh đối với tứ giác, nó cũng là trung điểm hai đường chéo của tứ giác.

c) Trọng tâm G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại.

● ***Giải***

a) Gọi O là điểm cố định bất kì ta có :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$$

$$\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OG}=\vec{0}$$

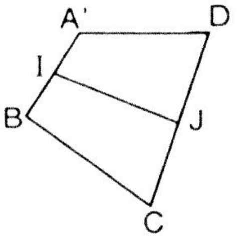
$$\Leftrightarrow\quad 4\overrightarrow{OG}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}\Leftrightarrow\overrightarrow{OG}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OI}\right)$$

Vậy điểm G xác định duy nhất sao cho $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}$

b) Gọi I, J lần lược là trung điểm của AB và CD ta có :

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\vec{0}\Rightarrow 2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow\overrightarrow{GI}+\overrightarrow{GJ}=\vec{0}\Rightarrow \text{G là trung điển IJ.}$$



Gọi M, N lần lượt là trung điểm của hai đường chéo AC và BD ta có:

$$\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=\left(\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GC}\right)+\left(\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GD}\right)$$

$$=2\overrightarrow{GM}+2\overrightarrow{GN}=\vec{0}$$

$\Rightarrow \overrightarrow{GM}+\overrightarrow{GN}=\vec{0} \Rightarrow$ G là trung điểm của MN.

c Gọi K là trọng tâm của tam giác BCD ta có :

$$\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}=3\overrightarrow{GK} \Rightarrow \overrightarrow{GA}+3\overrightarrow{GK}=\vec{0}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{GA}=-3\overrightarrow{GK} \Rightarrow \text{G, A, K thẳng hàng.}$$

Tương tự cho các trường hợp còn lại. Vậy G nằm trên các đoạn thẳng nối một đỉnh của tứ giác và trọng tâm của tam giác tạo bởi ba đỉnh còn lại.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Cho tứ giác ABCD. Gọi I, J lần lượt là trung điểm của BC và CD.*

Chứng minh rằng : $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{JA}+\overrightarrow{DA}=\dfrac{3}{2}\overrightarrow{DB}$

- ***Hướng dẫn***. Áp dụng quy tắc ba điểm.

2. *Cho tam giác ABC có trọng tâm G. Gọi I là điểm đối xứng của B qua C, M là trung điểm BC. Chứng minh rằng :*

a) $\overrightarrow{AI}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{AC}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ b) $\overrightarrow{CI}=-\dfrac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}\right)$

c $\overrightarrow{MI}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{AC}-\dfrac{5}{6}\overrightarrow{AB}$

3. *Cho tam giác ABC. Xác định điểm I, J, K thỏa các điều kiện sau :*

$\overrightarrow{IA}+2\overrightarrow{IC}=\vec{0}$; $2\overrightarrow{JA}+3\overrightarrow{JB}=3\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{KA}+\overrightarrow{KB}+2\overrightarrow{KC}=\vec{0}$

- ***Hướng dẫn.*** Chọn A làm gốc, biểu diễn $\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AJ}, \overrightarrow{AK}$ qua hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

4. *Cho hình bình hành ABCD. Xác định M thỏa:* $4\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$

- ***Hướng dẫn.*** Chứng minh $\overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

5. *Cho A, B cố định. M tuỳ ý và điểm P là điểm xác định bởi* $\overrightarrow{MP}=\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}$. *Chứng minh đường thẳng MP đi qua điểm cố định.*

- ***Hướng dẫn.*** Gọi I là điểm thoả $\overrightarrow{IA}+3\overrightarrow{IB}=\vec{0}$

  Chứng minh M, P, I thẳng hàng do $\overrightarrow{MP}=4\overrightarrow{MI}$

6. *Cho tứ giác ABCD*

a) *Xác định điểm I thoả* $\overrightarrow{IA}-2\overrightarrow{IB}+4\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

b) Với M bất kì, chứng minh : $\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC} = 3\overrightarrow{MI}$

c) Cho điểm M thỏa $|\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + 4\overrightarrow{MC}| = 3|\overrightarrow{MD}|$

Chứng minh M chạy trên đường thẳng cố định.

- ***Hướng dẫn***

a) Chọn A làm gốc ta có $\overrightarrow{AI} = \frac{3}{2}\left(2\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}\right)$

b) Áp dụng quy tắc ba điểm.

c) $3|\overrightarrow{MI}| = 3|\overrightarrow{MD}| \Leftrightarrow MI = MD \Leftrightarrow$ M chạy trên đường trung trực đoạn ID cố định.

7. *Cho tam giác ABC. Gọi P, Q, R là các điểm xác định bởi :*

$$3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} = \vec{0}, \qquad 3\overrightarrow{QA} - 2\overrightarrow{QC} = \vec{0}, \qquad 2\overrightarrow{RA} + \overrightarrow{RB} = \vec{0}$$

a) Hãy biểu diễn các vectơ $\overrightarrow{AP}, \overrightarrow{AQ}, \overrightarrow{AR}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$

b) Biểu diễn $\overrightarrow{PQ}$ *và* $\overrightarrow{PR}$ *theo* $\overrightarrow{AB}$ *và* $\overrightarrow{AC}$*. Từ đó suy ra P, Q, R là ba điểm thẳng hàng.*

- ***Hướng dẫn***

a) $\overrightarrow{AP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{AB} + \frac{4}{7}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AQ} = -2\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{AR} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

b) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AP} = -\frac{18}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{3}{7}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{PR} = \overrightarrow{AR} - \overrightarrow{AP} = -\frac{4}{7}\overrightarrow{AC} - \frac{2}{21}\overrightarrow{AB}$

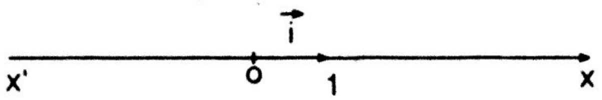
Suy ra $\overrightarrow{PQ} = \frac{9}{2}\overrightarrow{PR}$. Ba điểm P, Q, R thẳng hàng.

§5. TRỤC TOẠ ĐỘ VÀ HỆ TRỤC TOẠ ĐỘ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Trục toạ độ

- Trục toạ độ là một đường thẳng trên đó đã xác định một điểm O và một vectơ $\vec{i}$ có độ dài bằng 1.



- Điểm O gọi là gốc toạ độ, vectơ $\vec{i}$ gọi là vectơ đơn vị của trục toạ độ.
- Cho trục x'Ox có vectơ đơn vị $\vec{i}$. Vectơ $\vec{u}$ nằm trên trục thì có số a sao cho $\vec{u} = a\vec{i}$. Số a gọi là toạ độ của vectơ $\vec{u}$ đối với trục x'Ox.

- Điểm M trên trục x'Ox thì có số m sao cho $\overrightarrow{OM} = m\vec{i}$. Số m gọi là toạ độ của điểm M đối với trục x'Ox.
- Độ dài đại số của vectơ trên trục.

  Nếu hai điểm A,B nằm trên trục Ox thì toạ độ của vectơ $\overrightarrow{AB}$ được kí hiệu là $\overline{AB}$ và gọi là độ dài đại số của vectơ $\overrightarrow{AB}$ trên trục Ox. Vậy $\overrightarrow{AB} = \overline{AB} \cdot \vec{i}$.

  Ta có : a) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow \overline{AB} = \overline{CD}$

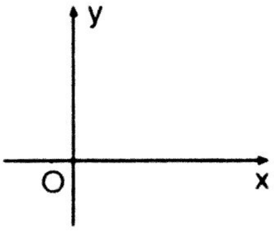
  b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overline{AB} + \overline{BC} = \overline{AC}$

2. Hệ trục toạ độ

Hệ trục toạ độ vuông góc bao gồm hai trục toạ độ Ox và Oy vuông góc với nhau vectơ đơn vị trên trục Ox là $\vec{i}$, vectơ đơn vị trên trục Oy là $\vec{j}$. O gọi là gốc toạ độ.

Trục Ox gọi là trục hoành, trục Oy gọi là trục tung.

Hệ trục toạ độ được kí hiệu là Oxy hay $(O, \vec{i}, \vec{j})$



3. Toạ độ của vectơ đối với hệ trục toạ độ

Đối với hệ trục toạ độ $(O, \vec{i}, \vec{j})$, nếu $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$ thì cặp số (x;y) gọi là toạ độ của vectơ $\vec{a}$, kí hiệu là $\vec{a}$ = (x,y) hay $\vec{a}(x,y)$. x gọi là hoành độ, y gọi là tung độ của $\vec{a}$ vectơ.

Ta có: $\vec{a}(x;y) = \vec{b}(x';y') \Leftrightarrow \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$

4. Biểu thức toạ độ của các phép toán vectơ

Cho $\vec{a}(x;y) = \vec{b}(x';y')$ khi đó :

a) $\vec{a} + \vec{b} = (x + x'; y + y')$; $\vec{a} - \vec{b} = (x - x'; y - y')$

b) $k\vec{a} = (kx; ky)$ với $k \in R$

c) Vectơ $\vec{b}$ cùng phương với vectơ $\vec{a} \neq \vec{0}$ khi và chỉ khi có số k sao cho

$$x' = kx,\ y' = ky.$$

5. Toạ độ của điểm

Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OM}$ được gọi là toạ độ của điểm M kí hiệu là M(x;y) hoặc M = (x;y).x gọi là hoành độ của M, y gọi là tung độ của M.

Với $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$ ta có: $\overrightarrow{MN} = (x_N - y_M; y_N - y_M)$

6. Toạ độ trung điểm của đoạn thẳng và toạ độ của trọng tâm tam giác

Giả sử $M(x_M; y_M), N(x_N; y_N)$, trung điểm $P(x_P; y_P)$ của đoạn MN thì:

$$x_P = \frac{x_M + x_N}{2};\ y_P = \frac{y_M + y_N}{2}$$

G là trọng tâm của tam giác ABC thì

$$x_G = \frac{x_A + x_B + x_C}{3};\ y_G = \frac{y_A + y_B + y_C}{3}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

***29.** Trong mặt phẳng toạ độ, mỗi mệnh đề sau đúng hay sai ?*

a) Hai vectơ $\vec{a} = (26;9)$ và $\vec{b} = (9;26)$ bằng nhau.

b) Hai vectơ bằng nhau khi và chỉ khi chúng có hoành độ bằng nhau và tung độ bằng nhau.

c) Hai vectơ đối nhau thì chúng có hoành độ đối nhau.

d) Vectơ $\vec{a}$ cùng phương với vectơ $\vec{i}$ nếu $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0.

e) Vectơ $\vec{a}$ có hoành độ bằng 0 thì nó cùng phương với vectơ $\vec{j}$.

- ***Trả lời.*** a) Sai b) Đúng c) Đúng d) Sai e) Đúng

***30.** Tìm độ dài của các vectơ sau trong mặt phẳng toạ độ*

$$\vec{a} = -\vec{i};\quad \vec{b} = 5\vec{j};\quad \vec{c} = 3\vec{i} - 4\vec{j};$$

$$\vec{d} = \frac{1}{2}\left(\vec{j} - \vec{i}\right);\quad \vec{e} = 0,15\vec{i} + 1,3\vec{j};\quad \vec{f} = \pi\vec{i} - (\cos 24^0)\vec{j}$$

- ***Giải.*** Áp dụng : $\vec{a} = (x;y) \Leftrightarrow \vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j}$

Ta có : $\vec{a} = (-1;0)$; $\vec{b} = (0;5)$; $\vec{c} = (3;-4)$;

$\vec{d} = \left(-\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$; $\vec{e} = (0,15;1,3)$; $\vec{f} = (\pi; -\cos 24^{\circ})$.

***31.** Cho vectơ $\vec{a} = (2;1)$; $\vec{b} = (3;4)$; $\vec{c} = (7;2)$.*

a) Tìm toạ độ của vectơ : $\vec{u} = 2\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c}$

b) Tìm vectơ $\vec{x}$ sao cho : $\vec{x} + \vec{a} = \vec{b} - \vec{c}$

c) Tìm các số k, l để : $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b}$

- ***Giải***

a) Ta có : $\vec{u} = (4 - 9 + 7; 2 - 12 + 2) = (2;-8)$

b) $\vec{x} = \vec{b} - \vec{c} - \vec{a} = (3 - 7 - 2; 4 - 2 - 1) = (-6;1)$

c) Ta có: $\vec{c} = k\vec{a} + l\vec{b} \Leftrightarrow (2k + 3l; k + 4l) = (7;2) \Leftrightarrow \begin{cases} 2k + 3l = 7 \\ k + 4l = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 4,4 \\ l = -0,6 \end{cases}$

***32.** Cho $\vec{u} = \frac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$, $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$. Tìm các giá trị của k để hai vectơ $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.*

- ***Giải.*** Ta có : $\vec{u} = \left(\frac{1}{2}; -5\right)$, $\vec{v} = (k; -4)$

$\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương $\Leftrightarrow$ có số l sao cho $\vec{v} = l\vec{u}$

$$\Leftrightarrow (k;-4) = \left(\frac{1}{2}l; -5l\right) \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{1}{2}l \\ -4 = -5l \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = \frac{2}{5} \\ l = \frac{4}{5} \end{cases}$$

Vậy với $k = \frac{2}{5}$ thì $\vec{u}, \vec{v}$ cùng phương.

33. *Trong các mệnh đề sau mệnh đề nào đúng ?*

a) Toạ độ của điểm A bằng toạ độ của vectơ $\overrightarrow{OA}$, với O là gốc toạ độ.

b) Hoành độ của một điểm bằng 0 thì điểm đó nằm trên trục hoành.

c) Điểm A nằm trên trục tung thì A có hoành độ bằng 0.

d) P là trung điểm của đoạn thẳng AB khi và chỉ khi hoành độ của điểm P bằng trung bình cộng các hoành độ của A,B.

e) Tứ giác ABCD là hình bình hành khi và chỉ khi:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \text{ và } y_A + y_C = y_B + y_D$$

- ***Trả lời***

a) Đúng ; b) Sai ; c) Đúng ; d) Sai

e) Đúng vì ABCD là hình bình hành

$\Leftrightarrow$ I vừa là trung điểm của AC vừa là trung điểm của BD.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_I = x_A + x_C = x_B + x_D \\ 2y_I = y_A + y_C = y_B + y_D \end{cases}$$

34. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm A (–3;4), B(1;1), C(9;–5)*

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C thẳng hàng.

b) Tìm toạ dô điểm D sao cho A là trung điểm của BD.

c) Tìm toạ độ E trên trục Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

- ***Giải***

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (4;-3)$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A) = (12;-9)$

Vì $\overrightarrow{AC} = 3\overrightarrow{AB}$ nên A, B, C thẳng hàng.

b) Gọi D (x_D, y_D) sao cho A là trung điểm của BD.

Ta có: $\begin{cases} x_A = \dfrac{x_B + x_D}{2} \\ y_A = \dfrac{y_B + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 = \dfrac{1 + x_D}{2} \\ 4 = \dfrac{1 + y_D}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D = -7 \\ y_D = 7 \end{cases}$

Vậy D(–7; 7).

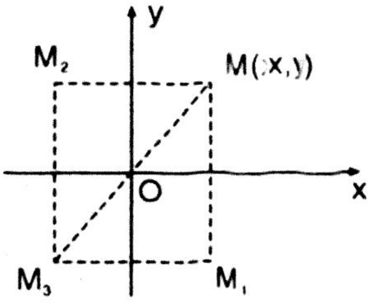
c) Giả sử E $(x_E, 0)$ trên Ox sao cho A, B, E thẳng hàng.

Ta có : $\overrightarrow{AB} = (4; -3); \overrightarrow{AE} = (x_E - 1; -1)$

A, B, E thẳng hàng $\Leftrightarrow$ có số k sao cho $\overrightarrow{AE} = k\overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_E - 1 = 4k \\ -1 = -3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = \dfrac{7}{3} \\ k = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Vậy E $\left(\dfrac{7}{3}; 0\right)$.



35. Cho điểm M(x; y). Tìm toạ độ của các điểm.

a) M_1 đối xứng với M qua trục Ox.

b) M_2 đối xứng với M qua trục Oy.

c) M_3 đối xứng với M qua gốc toạ độ O.

● ***Giải.*** a) $M_1(x ; -y)$; b) $M_2(-x ; y)$; c) $M_3(-x ; -y)$

36. Trong mặt phẳng toạ độ, cho ba điểm A(–4 ; 1), B(2 ; 4), C(2 ; –2)

a) Tìm toạ độ trọng tâm tam giác ABC.

b) Tìm toạ độ điểm D sao cho C là trọng tâm tam giác ABD.

c) Tìm toạ độ điểm E sao cho ABCE là hình bình hành.

● ***Giải***

a) Gọi G là trọng tâm tam giác ABC, ta có :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \dfrac{1}{3}(-4 + 2 + 2) = 0 \\ y_G = \dfrac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \dfrac{1}{3}(1 + 4 - 2) = \dfrac{3}{3} = 1 \end{cases} \quad \text{Vậy } G(0 ; 1)$$

b) Gọi $D(x_D, y_D)$ sao cho C là trọng tâm tam giác ABD

$$\text{Ta có : } \begin{cases} x_C = \dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_D) \\ y_C = \dfrac{1}{3}(y_A + y_B + y_D) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2 = \dfrac{1}{3}(-4 + 2 + x_D) \\ -2 = \dfrac{1}{3}(1 + 4 + y_D) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_D = 8 \\ y_D = -11 \end{cases} \quad \text{Vậy } D(8 ; -11)$$

c) ABCE là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EC}$

$$\Leftrightarrow \quad (2 + 4; 4 - 1) = (2 - x_E; -2 - y_E)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 2 - x_E = 6 \\ -2 - y_E = 3 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -4 \\ y_E = -5 \end{cases} \quad \text{Vậy } E(-4; -5)$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. *Trong mặt phẳng toạ độ cho ba điểm M(1; 1), N(2; 3), P(−1; 4), lần lượt là trung điểm ba cạnh AB, BC, CA của tam giác ABC. Tìm toạ độ ba đỉnh và toạ độ trọng tâm tam giác ABC.*

- ***Hướng dẫn.*** Giải hệ phương trình :

$$\begin{cases} x_A + x_B = 2 \\ x_B + x_C = 4 \\ x_C + x_A = -2 \end{cases} ; \begin{cases} y_A + y_B = 2 \\ y_B + y_C = 6 \\ y_C + y_A = 8 \end{cases}$$

Suy ra A(−2; 2), B(4; 0), C(0; 6) Trọng tâm G $\left(\frac{2}{3}; \frac{8}{3}\right)$

2. *Cho tam giác ABC có các đỉnh A(1; −2), B(0; 4), C(3; 2). Tìm toạ độ điểm D thỏa một trong các trường hợp sau :*

a) D là điểm đối xứng của A qua B.

b) ABCD là hình bình hành.

c) ABCD là hình thang có cạnh đáy AB và D nằm trên trục hoành.

- ***Hướng dẫn***

a) B là trung điểm của AD, D (−1; 10).

b) $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{DC}$, D(4; −4)

c) D(x; 0), D$\left(\frac{10}{3}; 0\right)$

3. *Cho A (1; 1), B(3; 2), C(m + 4; 2m + 1). Xác định m để ba điểm A, B, C thẳng hàng.*

- ***Hướng dẫn.*** $\overrightarrow{AB}$ cùng phương với $\overrightarrow{AC}$. Suy ra m =1.

4. *Chứng minh các điểm sau đây là các đỉnh của một hình vuông :*

A(2; 2), B(−1; 6), C(−5; 3), D(−2; −1).

Hướng dẫn. Chứng minh : $\begin{cases} AB = BC = CD = DA \\ BD^2 = AB^2 + AD^2 \end{cases}$

5. *Cho hai điểm A(2; 4), B(−2; 1). Tìm điểm C trên trục hoành sao cho :*

a) Tam giác ABC cân tại A.

b) Tam giác ABC cân tại C.

- ***Hướng dẫn***

a) Gọi C (x, 0) tìm x sao cho AB = AC ⇒ x = −1, x = 5

b) C$\left(\frac{15}{8}; 0\right)$

ÔN TẬP CHƯƠNG I

A. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG I

1. *Cho tam giác ABC. Hãy xác định các vectơ :* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}; \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA};$
$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}; \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB}; \overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB}$

- ***Giải.*** Ta có : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CA}$

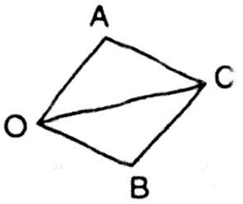
$\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BD}$ (Với D thoả $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AD}$, tức D là điểm đối xứng của C qua A).

$\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{BE}$ (tức E là điểm sao cho ABCE là hình bình hành)

2. *Cho ba điểm O, A, B không thẳng hàng. Tìm điều kiện cần và đủ để vectơ* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ *có giá là đường phân giác của góc AOB.*



- ***Giải.*** Gọi C là điểm sao cho AOBC là hình bình hành.

Ta có: $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OC}$.

OC là phân giác của góc AOB khi và chỉ khi AOBC là hình thoi $\Leftrightarrow$ OA = OB.

3. *Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD. Chứng minh rằng với điểm M bất kì ta có:* $\overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}\right)$

- ***Giải.*** ABCD là hình bình hành ta có :

$$\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = (\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) + (\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}) = \vec{0}$$

Từ đó suy ra:

$$\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MO} + \overrightarrow{MD}$$
$$= 4\overrightarrow{MO} + (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD}) = 4\overrightarrow{MO}$$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{MO} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD})$$

4. *Cho tam giác ABC.*

a) Tìm các điểm M và N sao cho:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \text{ và } 2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0}$$

b) Với các điểm M, N ở câu a). Tìm các số p và q sao cho:

$$\overrightarrow{MN} = p\overrightarrow{AB} + q\overrightarrow{AC}$$

- ***Giải***

a) Ta có: $\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad \overrightarrow{CM} = \overrightarrow{BA} \Leftrightarrow$ M là điểm sao cho ABCM là hình bình hành.

Gọi I là trung điểm của BC ta có:

$\overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = 2\overrightarrow{NI}$ suy ra $2\overrightarrow{NA} + 2\overrightarrow{NI} = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NI} = \vec{0} \Rightarrow$ N là trung điểm của AI.

b) Chọn A làm gốc ta sẽ biểu diễn $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{AN}$ qua $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$, ta có:

$$\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} = \vec{0} \Leftrightarrow -\overrightarrow{AM} - (\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}) + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AM} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = -\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$$

$$2\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{NB} + \overrightarrow{NC} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AN} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow 4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)$$

Vậy: $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right) + \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{4}\left(5\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}\right)$

$= \frac{5}{4}\overrightarrow{AB} - \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$. Do đó $p = \frac{5}{4}; q = -\frac{3}{4}$

5. Cho đoạn thẳng AB và điểm I sao cho $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$

a) Tìm số k sao cho $\overrightarrow{AI} = k\overrightarrow{AB}$

b) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta có: $\overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$

- ***Giải***

a) Ta có : $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0} \Leftrightarrow -2\overrightarrow{AI} + 3(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AI}) = \vec{0}$

$\Leftrightarrow \quad -5\overrightarrow{AI} = -3\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$. Vậy $k = \frac{3}{5}$

b) Từ $2\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ suy ra $2\left(\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MI}\right) + 3\left(\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MI}\right) = \vec{0}$

$\Rightarrow \quad 5\overrightarrow{MI} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{MI} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MA} + \frac{3}{5}\overrightarrow{MB}$

6. *Cho mặt phẳng tọa độ Oxy, cho ba điểm A(–1; 3), B(4; 2), C(3; 5).*

a) Chứng minh rằng ba điểm A, B, C không thẳng hàng.

b) Tìm tọa độ điểm D sao cho $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC}$

c) Tìm tọa độ điểm D sao cho O là trọng tâm tam giác ABE.

- ***Giải***

a) Ta có : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A) = (5; -1)$

$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A, y_C - y_A) = (4; 2)$

Vì $\frac{5}{4} \neq -\frac{1}{2}$ nên $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$ không cùng phương. Do đó A, B, C không thẳng hàng.

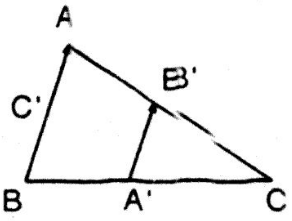
b) Giả sử : $D(x_D; y_D)$ ta có $\overrightarrow{AD} = (x_D + 1; y_D - 3)$; $\overrightarrow{BC} = (-1;3)$

Do đó $\overrightarrow{AD} = -3\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow \begin{cases} x_D + 1 = 3 \\ y_D - 3 = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} x_D = 2 \\ y_D = -6 \end{matrix}$ Vậy D(2; –6)

c) Gọi $E(x_E; y_E)$ ta có : $\begin{cases} x_0 = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_E) \\ y_0 = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_E) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{3}(-1 + 4 + x_E) \\ 0 = \frac{1}{3}(3 + 2 + y_E) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_E = -3 \\ y_E = -5 \end{cases}$ Vậy E(–3; –5)

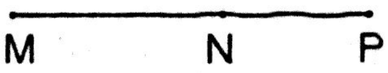
B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM



1. *Cho tam giác ABC. Gọi A', B', C' lần lượt là trung điểm của các cạnh BC, CA, AB. Vectơ $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với vectơ nào trong các vectơ sau đây ?*

(A) $\overrightarrow{AB}$; *(B)* $\overrightarrow{AC'}$; *(C)* $\overrightarrow{BA}$; *(D)* $\overrightarrow{C'B}$

- ***Trả lời.*** $\overrightarrow{A'B'}$ cùng hướng với vectơ $\overrightarrow{BA}$. **Chọn (C).**



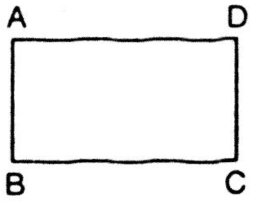
2. *Cho ba điểm M, N, P thẳng hàng, trong đó điểm N nằm giữa hai điểm M và P. Khi đó các cặp vectơ nào sau đây cùng hướng?*

(A) $\overrightarrow{MN}$ *và* $\overrightarrow{PN}$; *(B)* $\overrightarrow{MN}$ *và* $\overrightarrow{MP}$

(C) $\overrightarrow{MP}$ *và* $\overrightarrow{PN}$ *(D)* $\overrightarrow{MN}$ *và* $\overrightarrow{NP}$

- ***Trả lời.*** $\overrightarrow{MN}$ cùng hướng với $\overrightarrow{MP}$. **Chọn (B).**

3. *Cho hình chữ nhật ABCD. Trong các đẳng thức dưới đây, đẳng thức nào đúng ?*



(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AD}$; *(B)* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{DA}$;

(C) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BD}$; *(D)* $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$

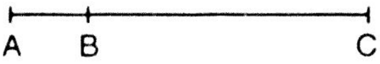
- ***Trả lời.*** Ta có: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. **Chọn (D).**

4. *Cho tam giác đều ABC với đường cao AH. Đẳng thức nào dưới đây đúng?*

(A) $\overrightarrow{HB} = \overrightarrow{HC}$; *(B)* $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{HC}$; *(C)* $|\overrightarrow{AH}| = \frac{\sqrt{3}}{2}|\overrightarrow{BC}|$ *(D)* $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC}$

- ***Trả lời.*** Ta biết rằng đường cao tam giác đều cạnh a bằng $\frac{a\sqrt{3}}{2}$. **Chọn (C)**

5. *Cho điểm B nằm giữa hai điểm A và C với AB = 2a, CB = 5a. Độ dài vectơ $\overrightarrow{AC}$ bằng bao nhiêu ?*



(A) $7a$; *(B)* $3a$; *(C)* $\frac{5a}{2}$; *(D)* $10a^2$

- ***Trả lời.*** $|\overrightarrow{AC}| = AC = AB + BC = 7a$. **Chọn (A).**

6. *Cho bốn điểm A, B, C, D. Khi đó đẳng thức nào sau đây đúng ?*

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}$ *(B)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$ *(D)* $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{BC}$

- ***Trả lời.*** Ta có: $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \left(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DB}\right) + \left(\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BD}\right) = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CB}$. **Chọn (C).**

7. *Cho sáu điểm A, B, C, D, E, F. Khi đó đẳng thức nào dưới đây đúng?*

(A) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \vec{0}$

(B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AF}$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE}$

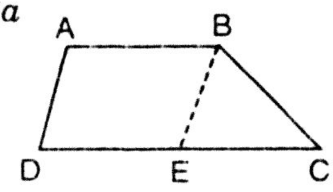
(D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AD}$

- ***Trả lời.*** Ta có :

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{FA} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FA} = \vec{0}$$

Chọn (A).

8. *Cho hình thang ABCD với hai cạnh đáy là AB = 3a và CD = 6a. Khi đó $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}|$ bằng bao nhiêu ?*

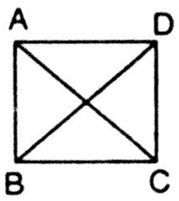


(A) $9a$; *(B)* $3a$; *(C)* $-3a$; *(D)* 0

- ***Trả lời.*** Gọi E là trung điểm CD

Ta có : $|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}| = |\overrightarrow{CE}| = CE = 3a$. **Chọn (B).**

9. *Cho hình vuông ABCD có cạnh bằng a khi đó giá trị $|\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}|$ bằng bao nhiêu ?*



(A) $2a\sqrt{2}$ *(B)* $2a$ *(C)* a *(D)* 0

- ***Trả lời.*** Ta có: $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{AD}$

$\Rightarrow |\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}| = |2\overrightarrow{AD}| = 2a$. **Chọn (B).**

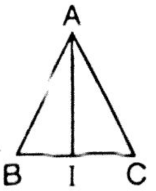
10. *Cho ba điểm bất kì A, B, C. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?*

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$ *(B)* $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{BA}$ *(D)* $\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{AB}$

- ***Trả lời.*** Ta có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}$. **Chọn (A).**

11. *Cho tam giác đều ABC có cạnh bằng a. Giá trị $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}$ bằng bao nhiêu?*



(A) $2a$; *(B)* a ; *(C)* $a\sqrt{3}$ *(D)* $\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

- ***Trả lời.*** Ta có : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AI}$ với I là trung điểm đoạn BC.

$$\Rightarrow |\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{CA}| = |2\overrightarrow{AI}| = 2\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2} = a\sqrt{3}$$ **Chọn (C).**

12. *Cho hai tam giác ABC và A'B'C' lần lượt có trọng tâm là G và G'. Đẳng thức nào dưới đây là sai ?*

(A) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$ *(B)* $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AB'} + \overrightarrow{BC'} + \overrightarrow{CA'}$

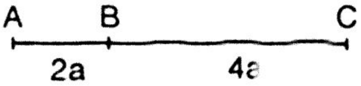
(C) $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{BA'} + \overrightarrow{CB'}$ *(D)* $3\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

- ***Trả lời.*** **Chọn (D).**

13. *Cho điểm B ở giữa hai điểm A và C với AB = 2a, AC = 6a. Đẳng thức nào dưới đây đúng ?*

(A) $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB}$ *(B)* $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AB}$

(C) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AB}$ *(D)* $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{BA}$

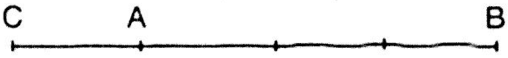


- ***Trả lời.*** Ta có: $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{BA}$. **Chọn (D).**

14. *Cho ba điểm phân biệt A, B, C. Nếu $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC}$ thì đẳng thức nào dưới đây đúng ?*

(A) $\overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$; *(B)* $\overrightarrow{BC} = -4\overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AC}$; *(D)* $\overrightarrow{BC} = -2\overrightarrow{AC}$



- ***Trả lời.*** $\overrightarrow{AB} = -3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -3\overrightarrow{AC} \Rightarrow \overrightarrow{BC} = 4\overrightarrow{AC}$. **Chọn (A).**

15. *Điều kiện nào dưới đây là cần và đủ để điểm O là trung điểm của đoạn AB ?*

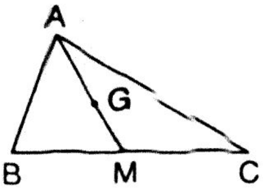
(A) $OA = OB$ *(B)* $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ *(C)* $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{BO}$ *(D)* $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

- ***Trả lời.*** **Chọn (D).**

16. *Nếu G là trọng tâm tam giác ABC thì đẳng thức nào dưới đây đúng ?*

(A) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$ *(B)* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$

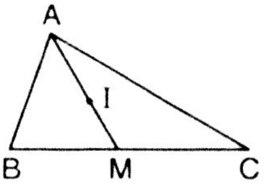
(A) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{3\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}{2}$ *(D)* $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2\left(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\right)}{3}$



- ***Trả lời.*** Gọi M là trung điểm BC ta có :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2} = \frac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{3}$$ **Chọn (B).**

17. *Gọi AM là trung tuyến của tam giác ABC và I là trung điểm của AM. Đẳng thức nào sau đây là đúng ?*



(A) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ *(B)* $-\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}-\overrightarrow{IC}=\vec{0}$ *(D)* $2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=\vec{0}$

- ***Trả lời.*** Ta có : $\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2\overrightarrow{IM}$

$\Rightarrow\quad 2\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}=2(\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IM})=\vec{0}$. **Chọn (D).**

18. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho hai điểm A(−1; 4) và B(3; −5). Khi đó tọa độ vectơ* $\overrightarrow{BA}$ *là bao nhiêu?*

(A) (2; −1) *(B) (−4; 9)* *(C) (4; −9)* *(D) (4; 9)*

- ***Trả lời.*** Ta có: $\overrightarrow{BA}=(x_A-x_B;y_A-y_B)=(-1-3;4+5)=(-4;9)$. **Chọn (B).**

19. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm A(0; 5) và B(2; −7). Tìm tọa độ trung điểm của đoạn AB là bao nhiêu ?*

(A) (2; 2) *(B) (−2; 12)* *(C) (−1; 6)* *(D) (1; −1)*

- ***Trả lời.*** Trung điểm của AB có tọa độ là $\left(\frac{0+2}{2};\frac{5-7}{2}\right)=(1;-1)$. **Chọn (D).**

20. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho hai điểm M(8; −1), N(3; 2). Nếu P là điểm đối xứng của M qua N thì toạ độ P là bao nhiêu ?*

(A) (−2; 5) *(B)* $\left(\frac{11}{2};\frac{1}{2}\right)$ *(C) (13; −3)* *(D)(11; −1)*

- ***Trả lời.*** N là trung điểm của MP nên :

$$\begin{cases}x_N=\dfrac{x_M+x_P}{2}\\ y_N=\dfrac{y_M+y_P}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3=\dfrac{8+x_P}{2}\\ 2=\dfrac{-1+y_P}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x_P=-2\\ y_P=5\end{cases}$$

. Vậy P(−2; 5). **Chọn (A).**

21. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho ba điểm A(5; −2), B(0; 3), C(−5; −1). Khi đó trọng tâm tam giác ABC có tọa độ bao nhiêu ?*

(A) (1; −1) *(B) (0; 0)* *(C) (0; 11)* *(D) (10; 0)*

- ***Trả lời.*** Tọa độ trọng tâm của tam giác ABC là :

$$\left(\frac{5+0-5}{3};\frac{-2+3-1}{3}\right)=(0;0).$$ **Chọn (B).**

22. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho tam giác ABC với trọng tâm G. Biết rằng A(−1; 4), B(2; 5), C(0; 7). Hỏi tọa độ điểm C là bao nhiêu ?*

(A) (2; 12) *(B) (−1; 12)* *(C) (3; 1)* *(D) (1; 12)*

- ***Trả lời.*** Ta có: $\begin{cases}x_G=\dfrac{1}{3}(x_A+x_B+x_C)\\ y_G=\dfrac{1}{3}(y_A+y_B+y_C)\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \frac{1}{3}\left(-1 + 2 + x_C\right) \\ 7 = \frac{1}{3}\left(4 + 5 + y_C\right) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = -1 \\ y_C = 12 \end{cases}$$. Vậy C(−1;12). **Chọn (B).**

23. *Trong mặt phẳng tọa độ Oxy cho bốn điểm A(3; 1) B(2; 2) và C(1 ;6) D(1; −6). Hỏi điểm G(2; −1) là trọng tâm của tam giác nào sau đây ?*

(A) Tam giác ABC *(B) Tam giác ABD*

(C) Tam giác ACD *(C) Tam giác BCD.*

- ***Trả lời.*** **(B)** vì $\begin{cases} 2 = \frac{1}{3}(3 + 2 + 1) \\ -3 = \frac{1}{3}(1 + 2 - 6) \end{cases}$

C. BÀI TẬP ÔN LÀM THÊM

1. Cho lục giác đều ABCDEF tâm O. Chứng minh rằng :

a) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OF} = \vec{0}$

b) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OF}$

c) $\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

d) $6\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}$ với M tuỳ ý.

e) Tìm tập hợp điểm M sao cho :

$$|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} + \overrightarrow{ME} + \overrightarrow{MF}| = 6|\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MD}|$$

2. Cho ba điểm A, B, C và ba số α, β, δ. Chứng minh rằng

a) Nếu $\alpha + \beta + \delta = 0$, thì vectơ $\vec{v} = \alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC}$

Không phụ thuộc vào vị trí điểm M.

b) Nếu $\alpha + \beta + \delta \neq 0$ thì tồn tại duy nhất điểm I thoả

$\alpha\overrightarrow{IA} + \beta\overrightarrow{IB} + \delta\overrightarrow{IC} = \vec{0}$ và M tuỳ ý ta có:

$$\alpha\overrightarrow{MA} + \beta\overrightarrow{MB} + \delta\overrightarrow{MC} = (\alpha + \beta + \delta)\overrightarrow{MI}$$

3. a) Xác định điểm I thỏa:

$$3\overrightarrow{IA} - 2\overrightarrow{IB} + \overrightarrow{IC} = \vec{0}$$

b) Tìm tập hợp điểm M thỏa:

$$|3\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}| = |\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MA}|.$$

Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT GÓC BẤT KÌ (TỪ 0° ĐẾN 180°)

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa

Với mỗi góc α ($0^\circ \le \alpha \le 180^\circ$), ta xác định điểm M trên nửa đường tròn đơn vị sao cho $\widehat{MOx} = \alpha$. Giả sử M(x; y). Khi đó:

$$\sin\alpha = y; \qquad \cos\alpha = x; \qquad \tan\alpha = \frac{y}{x}\ (x \neq 0)$$

$$\cot\alpha = \frac{x}{y}(y \neq 0); \qquad \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}; \qquad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

2. Tính chất

$$\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha; \qquad \cos(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(180^0 - \alpha) = -\tan\alpha; \qquad \cot(180^0 - \alpha) = -\cot\alpha\ (0^0 < \alpha < 180^0)$$

3. Giá trị lượng giác của một số góc đặc biệt

Góc	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
sin	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tan	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	kxđ	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
cot	kxđ	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	kxđ

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Tính giá trị đúng của các biểu thức sau (không dùng máy tính bỏ túi hoặc bảng số).*

a) $(2\sin 30^o + \cos 135^o - 3\tan 150^o).(\cos 180^o - \cot 60^o)$

b) $\sin^2 90^0 + \cos^2 120^0 + \cos^2 0^0 - \tan^2 60^0 + \cot^2 135^0$

● ***Giải***

a) Ta có: $\cos 135^0 = \cos(180^0 - 45^0) = -\cos 45^0 = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan 150^0 = \tan(180^0 - 30^0) = -\tan 30^0 = -\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

Do đó: $(2\sin 30^0 + \cos 135^0 - 3\tan 150^0)\cdot(\cos 180^0 - \cot 60^0)$

$$= \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} + \sqrt{3}\right)\cdot\left(-1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \sqrt{3} - 1\right)\cdot\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right)$$

b) Ta có: $\cos 120^0 = \cos(180^0 - 60^0) = -\cos 60^0 = -\dfrac{1}{2}$

$\cot 135^0 = \cot(180^0 - 45^0) = -\cot 45^0 = -1$

Do đó: $\sin^2 90^0 + \cos^2 120^0 + \cos^2 0^0 - \tan^2 60^0 + \cot^2 135^0$

$$= 1 + \frac{1}{4} + 1 - 3 + 1 = \frac{1}{4}$$

2. ***Đơn giản các biểu thức***

a) $\sin 100^0 + \sin 80^0 + \cos 16^0 + \cos 164^0$

b) $2\sin(180^0 - \alpha).\cot\alpha - \cos(180^0 - \alpha).\tan\alpha.\cot(180^0 - \alpha)$ *với* $0^0 < \alpha < 90^0$

● ***Giải***

a) $\sin 100^0 = \sin(180^0 - 80^0) = \sin 80^0$

$\cos 164^0 = \cos(180^0 - 16^0) = -\cos 16^0$

Do đó:

$$\sin 100^0 + \sin 80^0 + \cos 16^0 + \cos 164^0 = \sin 80^0 + \sin 80^0 + \cos 16^0 - \cos 16^0 = 2\sin 80^0$$

b) $2\sin(180^0 - \alpha).\cot\alpha - \cos(180^0 - \alpha).\tan\alpha.\cot(180^0 - \alpha)$

$$= 2\sin\alpha\,\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} - \cos\alpha\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 2\cos\alpha - \cos\alpha = \cos\alpha$$

3. ***Chứng minh các hệ thức sau :***

a) $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

b) $1 + \tan^2\alpha = \dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ $(\alpha \neq 90^0)$

c) $1 + \cot^2\alpha = \dfrac{1}{\sin^2\alpha}$ $(0^0 < \alpha < 180^0)$

● ***Giải***

a) Giả sử M(x; y) trên đường tròn đơn vị $\widehat{MOx} = \alpha$, ta có :

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = x^2 + y^2 = OM^2 = 1$$

b) $$1 + \tan^2\alpha = 1 + \frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

c) $$1+\cot^2\alpha = 1 + \frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}{\sin^2\alpha} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho $\cos\alpha = \frac{1}{3}$; tính $2\sin^2\alpha + 3\cos^2\alpha$.

2. Chứng minh các đẳng thức sau:

a) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$.

b) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

c) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha = 1 - 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

3. Cho $\tan\alpha = 2$. Tính $\frac{3\sin\alpha - 4\cos\alpha}{4\sin\alpha + 5\cos\alpha}$

- ***Hướng dẫn.*** Chia tử và mẫu cho $\cos\alpha$

4. Cho $\tan\alpha - \cot\alpha = a$, tính $A = \tan^2\alpha + \cot^2\alpha$; $B = \tan^3\alpha + \cot^3\alpha$; $C = \tan^4\alpha - \cot^4\alpha$

- ***Hướng dẫn.*** Áp dụng các hằng đẳng thức đáng nhớ :

5. Chứng minh rằng :

a) $\tan^2\alpha = \sin^2\alpha + \sin^2\alpha.\tan^2\alpha$.

b) $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \frac{1 - \tan^2\alpha}{1 + \tan^2\alpha}$

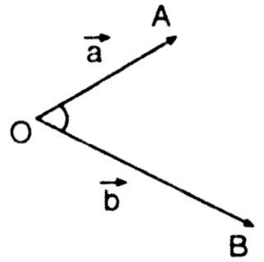
c) $\frac{\tan\alpha - \sin\alpha}{\sin^3\alpha} = \frac{1}{\cos\alpha(1 + \cos\alpha)}$

§2. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Góc giữa hai vectơ

Cho hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ đều khác vectơ $\vec{0}$. Từ O vẽ $\overrightarrow{OA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OB} = \vec{b}$ thì số đo góc AOB gọi là số đo góc giữa hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$, kí hiệu là $(\vec{a}, \vec{b})$. Nếu $(\vec{a}, \vec{b}) = 90^0$ thì $\vec{a}$ và $\vec{b}$ vuông góc với nhau, kí hiệu là $\vec{a} \perp \vec{b}$.



2. Định nghĩa tích vô hướng của hai vectơ

- Tích vô hướng của hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ là một số, kí hiệu là $\vec{a}.\vec{b}$, được xác định bởi

$$\vec{a}.\vec{b} = |\vec{a}|.|\vec{b}|.\cos(\vec{a},\vec{b})$$

- Bình phương vô hướng: $\vec{a}^2 = \vec{a}.\vec{a} = |\vec{a}|^2$

Bình phương vô hướng của một vectơ bằng bình phương độ dài của vectơ đó.

3. Tính chất của tích vô hướng

a) $\vec{a}.\vec{b} = \vec{b}.\vec{a}$

b) $\vec{a}.\vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

c) $(k\vec{a}).\vec{b} = \vec{a}(k\vec{b}) = k(\vec{a}.\vec{b})$

d) $\vec{a}(\vec{b}+\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b}+\vec{a}.\vec{c}$

$\vec{a}(\vec{b}-\vec{c}) = \vec{a}.\vec{b} - \vec{a}.\vec{c}$

4. Các kết quả cần nhớ

a) Cho hai vectơ $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}$. Gọi B′ là hình chiếu của B trên đường thẳng OA thì $|\vec{a}| = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$. Vectơ $\overrightarrow{OB'}$ gọi là hình chiếu của vectơ $\overrightarrow{OB}$ trên đường thẳng OA công thức $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB'}$ gọi là công thức chiếu.

b) Cho đường tròn (O ; R) và M cố định. Một đường thẳng Δ đi qua M cắt đường tròn tại A và B thì : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MO} = R^2 = d^2 - R^2$ (với d = OM)

Giá trị không đổi $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$ gọi là phương tích của M đối với đường tròn (O), và kí hiệu là: $\mathscr{P}_{M/(O)}$.

Ta có $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB} = d^2 - R^2$

Khi M ở ngoài đường tròn (O), MT là tiếp tuyến của (O) (T là tiếp điểm) thì $\mathscr{P}_{M/(O)} = \overrightarrow{MT}^2 = MT^2$.

5. Biểu thức tọa độ của tích vô hướng

Cho $\vec{a} = (x; y)$ và $\vec{b} = (x'; y')$. Khi đó :

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = x\cdot x' + y\cdot y'$

b) $|\vec{a}| = \sqrt{x^2+y^2}$

c) $\cos(\vec{a},\vec{b}) = \dfrac{x\cdot x' + y\cdot y'}{\sqrt{x^2+y^2}\cdot\sqrt{x'^2+y'^2}}$ $(\vec{a} \neq \vec{0}, \vec{b} \neq 0)$

Đặc biệt $\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow xx' + yy' = 0$

Hệ quả $M(x_M, y_M)$, $N(x_N, y_N)$

$$MN = |\overrightarrow{MN}| = \sqrt{(x_N - x_M)^2 + (y_N - y_M)^2}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

4. *Trong trường hợp nào tích vô hướng $\vec{a} \cdot \vec{b}$ có giá trị dương, có giá trị âm, bằng 0 ?*

- ***Giải.*** Ta có : $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(\vec{a}, \vec{b})$, do đó

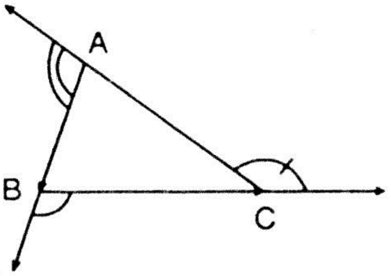
$\vec{a} \cdot \vec{b} > 0$ khi $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và góc $(\vec{a}, \vec{b}) < 90^0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} < 0$ khi $\vec{a}, \vec{b}$ khác $\vec{0}$ và góc $(\vec{a}, \vec{b}) > 90^0$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$.

5. *Cho tam giác ABC. Tổng $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB})$ có thể nhận giá trị nào trong các giá trị sau : 90^0; 180^0; 270^0; 360^0 ?*

- ***Giải***



Ta có : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 180^0 - \hat{B}$

$(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) = 180^0 - \hat{C}$

$(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 180^0 - \hat{A}$

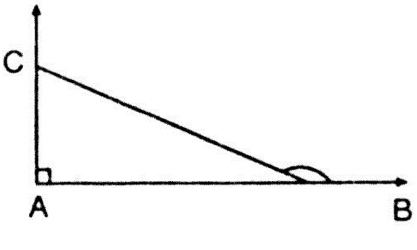
Do đó : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}) + (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{AB}) = 360^0$

6. *Cho tam giác ABC vuông tại A và $\hat{B} = 30^0$. Tính giá trị của các biểu thức sau :*

a) $\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\dfrac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2}$

b) $\sin(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA})$

- ***Giải***



a) Ta có : $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) = 150^0$

$(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) = 30^0$

$(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB}) = 120^0$

Do đó :

$$\cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}) + \sin(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}) + \tan\frac{(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{CB})}{2} = \cos 150^0 + \sin 30^0 + \tan 60^0$$

$$= \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} + \sqrt{3} = \frac{\sqrt{3} + 1}{2}$$

b) Ta có : $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{BA}) = 90^0$. Do đó :

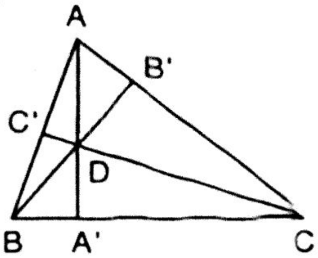
$$\sin(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) + \cos(\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}) + \cos(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{BA}) = \sin 90^0 + \cos 30^0 + \cos 90^0$$

$$= 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

7. *Cho bốn điểm bất kì A, B, C, D. Chứng minh rằng :*

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$$

Từ đó suy ra một cách chứng minh định lí "Ba đường cao của một tam giác đồng quy".



- ***Giải.*** Ta có :

$$\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB}$$

$$= \overrightarrow{DA}(\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DB}) + \overrightarrow{DB}(\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DC}) + \overrightarrow{DC}(\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DA})$$

$$= \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DB} - \overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{DA} = 0$$

Gọi D là giao điểm của hai đường cao AA' và BB' của tam giác ABC.

Ta có: $\overrightarrow{DA}\cdot\overrightarrow{BC} = 0; \overrightarrow{DB}\cdot\overrightarrow{CA} = 0$

Từ đó suy ra $\overrightarrow{DC}\cdot\overrightarrow{AB} = 0$ do đó $DC \perp AB$. Vậy D nằm trên đường cao CC' của tam giác, tức là ba đường cao trong tam giác đồng quy.

8. *Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để tam giác ABC vuông tại A là* $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = AB^2$

- ***Giải.*** Ta có: $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BA}^2 \Leftrightarrow \overrightarrow{BA}(\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{BA}) = 0$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \Leftrightarrow BA \perp AC$

$\Leftrightarrow$ Tam giác ABC vuông tại A.

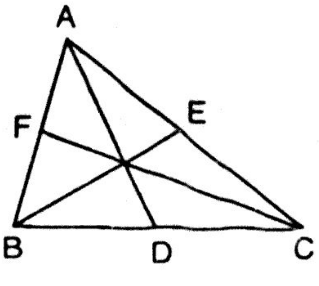
9. *Cho tam giác ABC với ba trung tuyến AD, BE, CF.*

Chứng minh rằng $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CF} = 0$

- ***Giải.*** Ta có : $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC})$$

$$\overrightarrow{CF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$



Do đó : $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BE} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CF}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\overrightarrow{BC}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BC}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB})$$

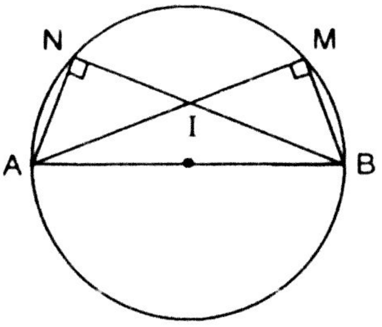
$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB})$$

$$= \frac{1}{2}[(\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CB}) + (\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BC}) + (\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA})] = 0$$

10. *Cho hai điểm M, N nằm trên đường tròn đường kính AB = 2R. Gọi I là giao điểm của hai đường thẳng AM và BN.*

a) Chứng minh rằng $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$; $\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$

b) Tính $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BI}$ *theo R.*



● ***Giải***

a) Ta có: $\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BM})\cdot\overrightarrow{AI}$

$$=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}$$

(vì $\overrightarrow{BM}\cdot\overrightarrow{AI}=0$).

Tương tự :

$$\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BI}=(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AN})\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$$

(vì $\overrightarrow{AN}\cdot\overrightarrow{BI}=0$)

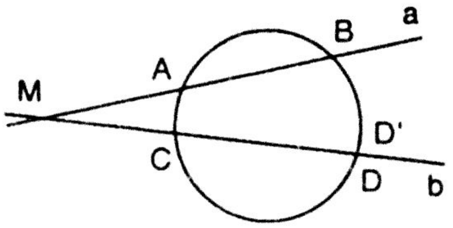
Chú ý: Có thể áp dụng công thức hình chiếu.

b) Áp dụng câu a) ta có:

$$\overrightarrow{AM}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BN}\cdot\overrightarrow{BI}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AI}+\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BI}$$

$$=\overrightarrow{AB}(\overrightarrow{AI}-\overrightarrow{BI})=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB}=AB^2=4R^2$$

11. *Cho hai đường thẳng a và b cắt nhau tại M. Trên a có hai điểm A và B, trên b có hai điểm C và D thỏa mãn* $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD}$. *Chứng minh rằng bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.*



● ***Giải***. Gọi (O) là đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Gọi D' là giao điểm của b với (O).

Ta có : $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD'}$

Từ giả thiết suy ra $\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MB}=\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{MD'}$

$$\Rightarrow\overrightarrow{MC}\cdot(\overrightarrow{MD}-\overrightarrow{MD'})=0\Rightarrow\overrightarrow{MC}\cdot\overrightarrow{DD'}=0$$

$\Rightarrow\overrightarrow{D'D}=\vec{0}$ (Do M, C, D, D' cùng thuộc đường thẳng b)

$\Rightarrow D\equiv D'$.

Vậy bốn điểm A, B, C, D cùng nằm trên một đường tròn.

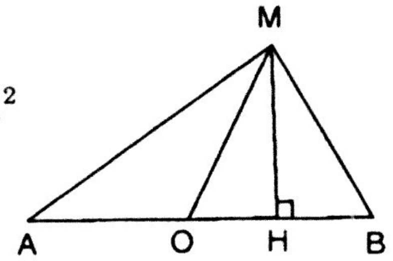
12. *Cho đoạn thẳng AB cố định AB = 2a và một số k^2. Tìm tập hợp các điểm M sao cho :* $MA^2-MB^2=k^2$

● ***Giải.*** Gọi O là trung điểm đoạn AB, H là hình chiếu của M lên AB. Ta có :

$$MA^2-MB^2=k^2\Leftrightarrow\overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2=k^2$$

$$\Leftrightarrow(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB})=k^2$$

$$\Leftrightarrow 2\overrightarrow{MO}\cdot\overrightarrow{BA}=k^2$$



$\Leftrightarrow \ \overrightarrow{HO}\cdot\overrightarrow{BA} = \dfrac{k^2}{2}$ Suy ra H cố định nằm trên tia OB và $OH = \dfrac{k^2}{4a}$

Vậy tập hợp các điểm M là đường thẳng vuông góc với AB tại H, H nằm trên tia OB sao cho $OH = \dfrac{k^2}{4a}$.

13. *Trong mặt phẳng toạ độ cho* $\vec{u} = \dfrac{1}{2}\vec{i} - 5\vec{j}$ *và* $\vec{v} = k\vec{i} - 4\vec{j}$

a) Tìm các giá trị của k để $\vec{u} \perp \vec{v}$.

b) Tìm các giá trị của k để $|\vec{u}| = |\vec{v}|$

- ***Giải.*** Ta có : $\vec{u} = \left(\dfrac{1}{2};-5\right)$; $\vec{v} = (k;-4)$

a) $\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0 \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\cdot k + (-5)\cdot(-4) = 0 \Leftrightarrow k = -40$

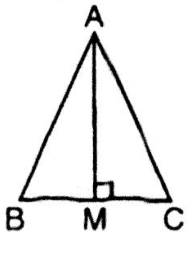
b) $|\vec{u}| = |\vec{v}| \Leftrightarrow \sqrt{\dfrac{1}{4} + 25} = \sqrt{k^2 + 16} \Leftrightarrow \dfrac{101}{4} = k^2 + 16 \Leftrightarrow k = \pm\dfrac{\sqrt{37}}{2}$

14. *Trong mặt phẳng tọa độ, cho tam giác ABC có các đỉnh A(–4; 1), B(2; 4), C(2; –2)*

a) Tính chu vi và diện tích của tam giác đó.

b) Tìm tọa độ trọng tâm G, trực tâm H và tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Từ đó hãy kiểm tra tính chất thẳng hàng của ba điểm I, G, H.

- ***Giải***



a) Ta có: $\overrightarrow{AB} = (6;3)$, $\overrightarrow{AC} = (6;-3)$, $\overrightarrow{BC} = (0;-6)$

Suy ra $AB = \sqrt{6^2 + 3^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$AC = \sqrt{6^2 + (-3)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

$BC = \sqrt{0^2 + (-6)^2} = 6$

Tam giác ABC cân tại A.

Chu vi tam giác ABC là $3\sqrt{5} + 3\sqrt{5} + 6 = 6(\sqrt{5} + 1)$

Gọi M là trung điểm của BC thì AM là đường cao của tam giác ABC.

Ta có: M(2; 1) và $AM = \sqrt{6^2 + 0^2} = 6$

Diện tích tam giác ABC là :

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}BC\cdot AM = \frac{1}{2}\cdot 6\cdot 6 = 18$$

b) Tọa độ trọng tâm G của tam giác ABC.

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{3}(x_A + x_B + x_C) = \dfrac{1}{3}(-4 + 2 + 2) = 0 \\ y_G = \dfrac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) = \dfrac{1}{3}(1 + 4 + (-2)) = 1 \end{cases} \quad \text{Vậy } G(0;\ 1)$$

Gọi H (x; y) là trực tâm của tam giác ABC.

Ta có : $\begin{cases} \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC} = 0 \\ \overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)\cdot 0 + (y-1)\cdot(-6) = 0 \\ (x-2)\cdot 6 + (y-4)\cdot(-3) = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \text{ Vậy } H\left(\frac{1}{2};1\right)$$

Gọi I(x, y) là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Ta có :

$$\begin{cases} AI^2 = BI^2 \\ AI^2 = CI^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y-4)^2 \\ (x+4)^2 + (y-1)^2 = (x-2)^2 + (y+2)^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 - 8y + 16 \\ x^2 + 8x + 16 + y^2 - 2y + 1 = x^2 - 4x + 4 + y^2 + 4y + 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 2y = 1 \\ 4x - 2y = -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{1}{4} \\ y = 1 \end{cases}. \text{ Vậy } I\left(-\frac{1}{4};1\right)$$

Khi đó ta có : $\overrightarrow{IG} = \left(\frac{1}{4};0\right)$; $\overrightarrow{IH} = \left(\frac{3}{4};0\right)$

Do đó : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IH}$, suy ra I, G, H thẳng hàng.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC có AB = 2, AC = 3, $\widehat{A} = 60^0$

   a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CA}$ b) Tính BC

2. Cho hình vuông ABCD cạnh a, tâm O. Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{BC}$

3. Cho tam giác ABC có AB = 3, BC = 6, CA = 8.

   a) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ và góc A.

   b) Tính độ dài trung tuyến AM.

   c) Xác định điểm I thoả $5\overrightarrow{IA} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$

   d) Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{IA}$ và BI.

4. Cho tam giác ABC có AB = 3, BC = 4, CA = 6.

   Tính $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{AB}$

5. Gọi G là trọng tâm tam giác ABC có độ dài ba cạnh a, b, c Chứng minh rằng:

$$GA^2 + GB^2 + GC^2 = \frac{1}{3}(a^2 + b^2 + c^2)$$

● ***Hướng dẫn.*** $GA^2 = \frac{4}{9}AM^2 = \frac{4}{9}\cdot\frac{1}{4}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})^2 = \frac{1}{9}(b^2 + c^2 + 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC})$

6. Cho tứ giác ABCD. Tìm tập hợp điểm M sao cho:

$$(\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB})\cdot(\overrightarrow{MC} + 3\overrightarrow{MD}) = 0$$

● ***Hướng dẫn.*** Gọi I, J là điểm thỏa: $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} = \vec{0}$ và $\overrightarrow{JC} + 3\overrightarrow{JD} = \vec{0}$

Tập hợp M là đường tròn đường kính IJ.

§3. HỆ THỨC LƯỢNG TRONG TAM GIÁC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định lí cosin trong tam giác

Trong tam giác ABC, với BC = a, CA = b, AB = c ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$$

Hệ quả: $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$;

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac};$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}.$$

2. Định lí sin trong tam giác

Với mọi tam giác ABC, ta có: $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$

R là bán kính đường tròn ngoại tiếp ABC.

3. Độ dài đường trung tuyến của tam giác

Gọi m_a, m_b, m_c lần lượt là độ dài các đường trung tuyến ứng với các cạnh BC = a, CA = b, AB = c thì:

$$m_a^2 = \frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4};\ m_b^2 = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4};\ m_c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4};$$

4. **Diện tích tam giác**

Gọi h_a, h_b h_c lần lượt là độ dài các đường cao ứng với các cạnh BC, CA, AB; R, r lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp,nội tiếp tam giác, $p = \frac{a+b+c}{2}$ là nửa chu vi tam giác. Diện tích tam giác được tính theo công thức sau:

$$S = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}ch_c$$

$$S = \frac{1}{2}ab\sin C = \frac{1}{2}ac\sin B = \frac{1}{2}bc\sin A$$

$$S = \frac{abc}{4R},\ S = pr$$

$$S = \sqrt{p(p-a)\cdot(p-b)\cdot(p-c)}\ \text{(Công thức Hêrông)}$$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

15. Tam giác ABC có a = 12, b = 13, c = 15. Tính cosA và góc A.

- ***Giải.*** Áp dụng công thức tính cosA ta có:

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{13^2+15^2-12^2}{2\cdot13\cdot15} = \frac{25}{39}$$

$$\widehat{A} = 50^0$$

16. Cho tam giác ABC có AB = 5, AC = 8, $\widehat{A} = 60^0$. Kết quả nào trong các kết quả sau là độ dài cạnh BC ?

a) $\sqrt{129}$ *b) 7* *c) 49* *d)* $\sqrt{69}$

- ***Trả lời.*** Ta có : $BC^2 = a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A = 8^2 + 5^2 - 2.8.5.\cos 60^0$

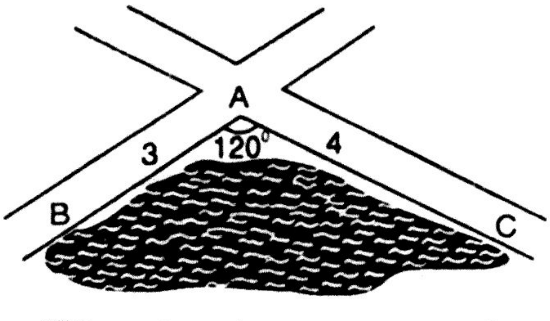
$= 49 \Rightarrow BC = 7$. **Chọn b).**

17. Hình vẽ bên, vẽ một hồ nước nằm góc tạo bởi hai con đường. Bốn bạn An, Cường, Trí, Đức dự đoán khoảng cách từ B đến C như sau:

An : 5km *Cường : 6km* *Trí : 7km* *Đức : 5,5km*

Biết rằng khoảng cách từ A đến B là 3km, khoảng cách từ A đến C là 4km, góc BAC là 120^0.

Hỏi dự đoán của bạn nào sát với thực tế nhất?



- ***Giải.*** Áp dụng định lí cosin ta có:

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos\widehat{BAC} = 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 120^0$$

$$= 9 + 16 + 12 = 37 \Rightarrow BC = \sqrt{37} \approx 6{,}1\text{km}.$$

Bạn Cường dự đoán sát với thực tế nhất.

18. *Cho tam giác ABC. Chứng minh các khẳng định sau:*

a) Góc A nhọn khi và chỉ khi $a^2 < b^2 + c^2$.

b) Góc A tù khi và chỉ khi $a^2 > b^2 + c^2$.

c) Góc A vuông khi và chỉ khi $a^2 = b^2 + c^2$.

● ***Giải.*** Ta có: $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$

a) A nhọn $\Leftrightarrow \cos A > 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 > a^2$

b) A tù $\Leftrightarrow \cos A < 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 < a^2$

c) A vuông $\Leftrightarrow \cos A = 0 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$

19. *Cho tam giác ABC có* $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 45^0$, $b = 4$. *Tính hai cạnh a và c.*

● ***Giải.*** Áp dụng định lí sin ta có :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4}{\sin 45^0}$$

$$\frac{a}{\sin 60^0} = \frac{4}{\sin 45^0} \Rightarrow a = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 4 \cdot \sqrt{2} = 2\sqrt{6} \approx 4,9$$

$$\frac{c}{\sin 75^0} = \frac{4}{\sin 45^0} \Rightarrow c \approx 5,5$$

20. *Cho tam giác ABC có* $\widehat{A} = 60^0$, $a = 6$. *Tính bán kính dường tròn ngoại tiếp tam giác.*

● ***Giải.*** Ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{6}{2\sin 60^0} = \dfrac{6}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{3} \approx 3,5$

21. *Chứng minh rằng nếu ba góc của tam giác ABC thỏa mãn hệ thức:*

sinA = 2sinBcosC thì tam giác ABC là tam giác cân.

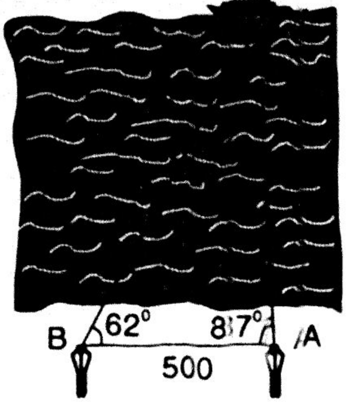
● ***Giải.*** Áp dụng định lí sin và cosin ta có:

$$\sin A = \frac{a}{2R}, \quad \sin B = \frac{b}{2R}, \quad \cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

Do đó : $\sin A = 2\sin B\cos C \Leftrightarrow \dfrac{a}{2R} = 2 \cdot \dfrac{b}{2R} \cdot \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$

$$\Leftrightarrow a^2 = a^2 + b^2 - c^2 \Leftrightarrow b = c \Leftrightarrow \text{ABC là tam giác cân.}$$

22. *Hình bên vẽ một chiếc tàu thuỷ đang neo đậu ở vị trí C trên biển và hai người ở vị trí quan sát A và B cách nhau 500m. Họ đo được góc CAB bằng* 87^0 *và góc CBA bằng* 62^0. *Tính các khoảng cách AC và BC.*



● ***Giải.*** Ta có : $\widehat{ACB} = 180^0 - 87^0 - 62^0 = 31^0$

Áp dụng định lí sin ta có :

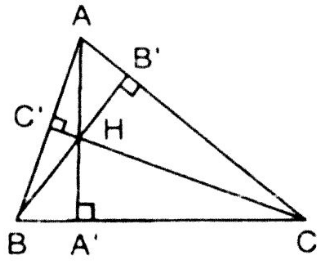
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=\frac{500}{\sin 31^0}\approx 971$$

$$\Rightarrow BC = a = 971.\sin 87^0 \approx 969\,\text{m và } AC = b = 971.\sin 62^0 \approx 857\text{m}$$

23. *Gọi H là trực tâm của tam giác không vuông ABC. Chứng minh rằng bán kính các đường tròn ngoại tiếp các tam giác ABC, HBC, HCA, HAB bằng nhau.*

- ***Giải***

- *Trường hợp 1:* Tam giác ABC có ba góc nhọn.



Gọi R, R_1 lần lượt là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC, HBC.

Áp dụng định lí sin ta có:

$$\frac{BC}{\sin A}=2R\ ;\ \frac{BC}{\sin\widehat{BHC}}=2R_1$$

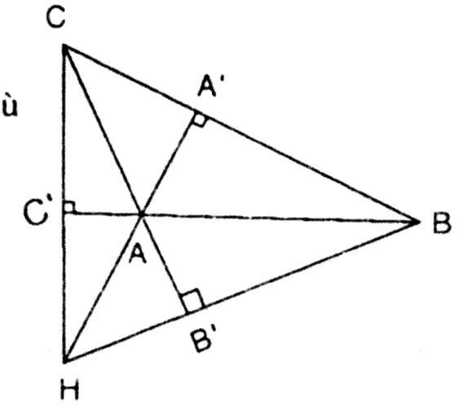
Mà $\widehat{BHC}+\widehat{A}=\widehat{B'HC'}+\widehat{A}=180^0 \Rightarrow \sin A=\sin\widehat{BHC}$

Do đó : $2R = 2R_1 \Rightarrow R = R_1$.

Vậy bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác HBC bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

Tương tự: bán kính dường tròn ngoại tiếp tam giác HCA, HAB cũng bằng bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC.

- *Trường hợp 2 :* Tam giác ABC có góc A tù



Ta có: $\dfrac{BC}{\sin A}=2R\ ;\ \dfrac{BC}{\sin\widehat{CHB}}=2R_1$

Mà $\widehat{A}+\widehat{CHB}=180^0$

$$\Rightarrow \sin\widehat{A}=\sin\widehat{CHB}\Rightarrow R_1=R$$

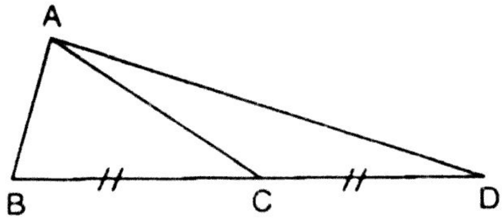
Tương tự $R_{HBC}=R_{HCA}=R_{HAB}=R_{ABC}$

24. *Tam giác ABC có a = 7, b = 8, c = 6. Tính m_a.*

- ***Giải.*** Áp dụng công thức tính m_a ta có :

$$m_a^2=\frac{b^2+c^2}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{8^2+6^2}{2}-\frac{7^2}{4}=\frac{151}{4}\Rightarrow m_a\approx 6,1$$

25. *Tam giác ABC có a = 5, b = 4, c = 3. Lấy điểm D đối xứng với B qua C. Tính độ dài AD.*

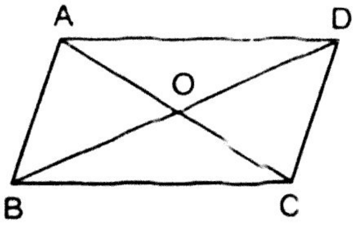


- ***Giải.*** Áp dụng công thức tính trung tuyến AC trong tam giác ABD ta có:

$$AC^2=\frac{AB^2+AD^2}{2}-\frac{BD^2}{4}\Rightarrow 4^2=\frac{3^2+AD^2}{2}-\frac{10^2}{4}\Rightarrow AD^2=73\Rightarrow AD=\sqrt{73}\approx 8{,}5.$$

26. *Cho hình bình hành ABCD có AB = 4, BC = 5, BD = 7. Tính AC.*

● ***Giải.*** Ta có : AB = 4, BC = 5, BD = 7.



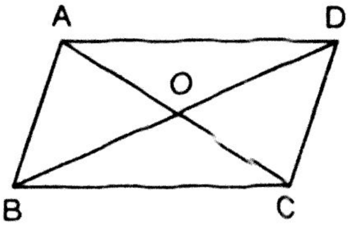
Áp dụng công thức tính trung tuyến AO trong tam giác ABD (O là tâm hình bình hành)

Ta có:

$$AO^2 = \frac{AB^2 + AD^2}{2} - \frac{BD^2}{4} = \frac{4^2 + 5^2}{2} - \frac{7^2}{4} = \frac{33}{4}$$

$$\Rightarrow AO = \sqrt{\frac{33}{4}} \approx 2{,}9 \Rightarrow AC = 2AO = \sqrt{33} \approx 5{,}8$$

27. *Chứng minh rằng trong một hình bình hành, tổng bình phương các cạnh bằng tổng bình phương của hai đường chéo.*



● ***Giải.*** Áp dụng công thức tính trung tuyến của tam giác ABD ta có:

$$4AO^2 = 2(AB^2 + AD^2) - BD^2$$

$$\Rightarrow AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + AD^2)\text{(đpcm)}$$

28. *Chứng minh rằng tam giác ABC vuông tại A khi và chỉ khi*

$$5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$$

● ***Giải***: Ta có: $5m_a^2 = m_b^2 + m_c^2$

$$\Leftrightarrow 5\left(\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}\right) = \frac{a^2 + c^2}{2} - \frac{b^2}{4} + \frac{a^2 + b^2}{2} - \frac{c^2}{4}$$

$$\Leftrightarrow 5(2b^2 + 2c^2 - a^2) = 2a^2 + 2c^2 - b^2 + 2a^2 + 2b^2 - c^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = a^2$$

⇔Tam giác ABC vuông tại A.

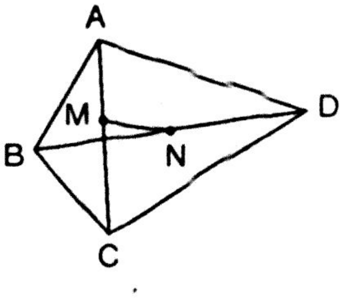
29. *Tam giác ABC có b = 6,12 ; c = 5,35 ; $\widehat{A} = 84^0$. Tính diện tích tam giác đó.*

● ***Giải.*** Ta có:

$$\text{Diện tích } S_{ABC} = \frac{1}{2} b \cdot c \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot (6{,}12) \cdot (5{,}35) \cdot \sin 84^0 \approx 16{,}3$$

30. *Cho tứ giác ABCD. Gọi M, N lần lượt là trung điểm của AC và BD. Chứng minh rằng: $AB^2 + BC^2 + CD^2 + DA^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$*

● ***Giải.*** MN là trung tuyến ΔBMD ta có:



$$4MN^2 = 2(BM^2 + DM^2) - BD^2 \quad (1)$$

Mà BM, DM lần lượt là trung tuyến của tam giác ABC và ADC nên

$$4BM^2 = 2(AB^2 + BC^2) - AC^2 \quad (2)$$

$$4DM^2 = 2(AD^2 + DC^2) - AC^2 \quad (3)$$

Từ (2) và (3) suy ra :

$$2(BM^2 + DM^2) = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2 \quad (4)$$

Thay (4) vào (1) ta có :

$$4MN^2 = AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 - AC^2 - BD^2$$

$$\Rightarrow \quad AB^2 + BC^2 + AD^2 + DC^2 = AC^2 + BD^2 + 4MN^2$$

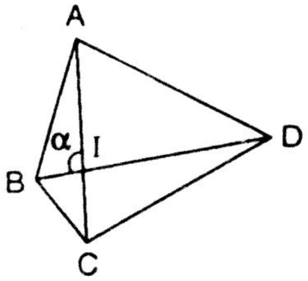
31. *Gọi S là diện tích và R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC. Chứng minh rằng: $S = 2R^2\sin A.\sin B.\sin C$.*

● ***Giải.*** Áp dụng công thức tính diện tích và định lí sin trong tam giác ABC. Ta có:

$$S = \frac{abc}{4R} = \frac{(2R\sin A)\cdot(2R\sin B)\cdot(2R\sin C)}{4R}$$

$$= 2R^2.\sin A.\sin B.\sin C$$

32. *Chứng minh rằng diện tích của một tứ giác bằng nửa tích hai đường chéo và sin của góc hợp bởi hai đường chéo đó.*



● ***Giải.*** Gọi I là giao điểm hai đường chéo AC và BD của tứ giác ABCD và $\alpha = \widehat{AIB}$

Ta có : $S_{ABI} = \frac{1}{2}AI.BI.\sin\alpha$

$$S_{ADI} = \frac{1}{2}AI.DI.\sin(180^0 - \alpha) = \frac{1}{2}AI\cdot DI\sin\alpha$$

$$\Rightarrow S_{ABD} = S_{ABI} + S_{ADI} = \frac{1}{2}AI(BI + DI)\sin\alpha = \frac{1}{2}AI.BD.\sin\alpha.$$

Tương tự: $S_{BCD} = S_{BCI} + S_{CDI} = \frac{1}{2}CI.BD.\sin\alpha$

Từ đó suy ra:

$$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{BCD} = \frac{1}{2}BD.\sin\alpha(AI + CI) = \frac{1}{2}AC.BD.\sin\alpha$$

33. *Giải tam giác ABC, biết:*

a) $c = 14$, $\widehat{A} = 60^0$, $\widehat{B} = 40^0$, *b) $b = 4,5$, $\widehat{B} = 30^0$, $\widehat{C} = 75^0$*

c) $c = 35$, $\widehat{A} = 40^0$, $\widehat{C} = 120^0$ *d) $a = 137,5$, $\widehat{B} = 83^0$, $\widehat{C} = 57^0$*

● ***Giải***

a) Ta có : $\widehat{C} = 180^0 - 60^0 - 40^0 = 80^0$

Áp dụng định lí sin :

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{14}{\sin 80^0}$$

$$\Rightarrow a = \frac{14}{\sin 80^0}\cdot\sin 60^0 \approx 12,3 \text{ và } b = \frac{14}{\sin 80^0}\cdot\sin 40^0 \approx 9,1$$

b) $\widehat{B} = 180^0 - 30^0 - 75^0 = 75^0$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{4,5}{\sin 75^0}$$

$$\Rightarrow a = \frac{4,5}{\sin 75^0} \cdot \sin 30^0 \approx 2,3 \ ; \ c = \frac{4,5}{\sin 75^0} \cdot \sin 75^0 = 4,5$$

c) $\widehat{B} = 180^0 - 40^0 - 120^0 = 20^0$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{35}{\sin 120^0} \approx 40,4 \Rightarrow a \approx 26, \ b \approx 13,8$$

d) $\widehat{A} = 40^0 ; \approx 212,3 \ ; \ c \approx 179,4$

***34.** Giải tam giác ABC, biết : a) $a = 6,3$; $b = 6,3$; $\widehat{C} = 54^0$*

b) $b = 32$; $c = 45$, $\widehat{A} = 87^0$

c) $a = 7$; $b = 23$; $\widehat{C} = 130^0$

● ***Giải***

a) Ta có : $\widehat{A} = \widehat{B} = \dfrac{180^0 - 54^0}{2} = 63^0$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{6,3}{\sin 63^0} \Rightarrow c = \frac{6,3}{\sin 63^0} . \sin 54^0 \approx 5,7$$

b) $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc.\cos A$

$$= 32^2 + 45^2 - 2.32.45.\cos 87^0 \approx 2898,27 \Rightarrow a \approx 53,8$$

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} \Rightarrow \sin B = \frac{b \sin A}{a} = \frac{32 \sin 87^0}{53,8} \approx 0,6$$

$$\Rightarrow \widehat{B} \approx 36^0, \widehat{C} \approx 57^0$$

c) $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

$$= 7^2 + 23^2 - 2.7.23.\cos 130^0 \approx 785 \Rightarrow c \approx 28$$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{23^2 + 28^2 - 7^2}{2.23.28} \approx 0,98$$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 11^0 ; \widehat{B} \approx 39^0$$

***35.** Giải tam giác ABC, biết: a) $a = 14$, $b = 18$, $c = 20$;*

b) $a = 6$, $b = 7,3$, $c = 4,8$

c) $a = 4$, $b = 5$, $c = 7$

● ***Giải***

a) $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \dfrac{18^2 + 20^2 - 14^2}{2.18.20} = 0,73$

$$\Rightarrow \widehat{A} \approx 43^0 ; \widehat{B} \approx 61^0 ; \widehat{C} \approx 76^0$$

b) $$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{6^2+(4,8)^2-(7,3)^2}{2.6.(4,8)} \approx 0,1$$

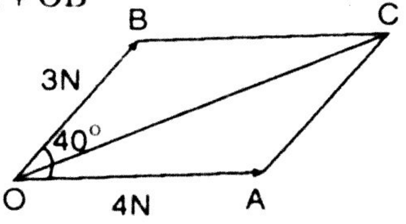
$$\Rightarrow \widehat{B} = 85^0; \widehat{A} = 55^0; \widehat{C} \approx 40^0$$

c) $$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{5^2+7^2-4^2}{2.5.7} \approx 0,83 \Rightarrow \widehat{A} \approx 34^0$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4^2+7^2-5^2}{2.4.7} \approx 0,71 \Rightarrow \widehat{B} \approx 44^0; \widehat{C} \approx 102^0$$

36. *Biết hai lực cùng tác động vào một vật và tạo với nhau góc 40^0. Cường độ của hai lực đó là 3N và 4N. Tính cường độ của lực tổng hợp.*

● ***Giải.*** Vẽ hình bình hành AOBC thì $\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$



Ta có: $\widehat{OBC} = 180^0 - 40^0 = 140^0$

Áp dụng định lí cosin trong tam giác OBC

Ta có: $OC^2 = OB^2 + BC^2 - 2OB.BC\cos 140^\circ$

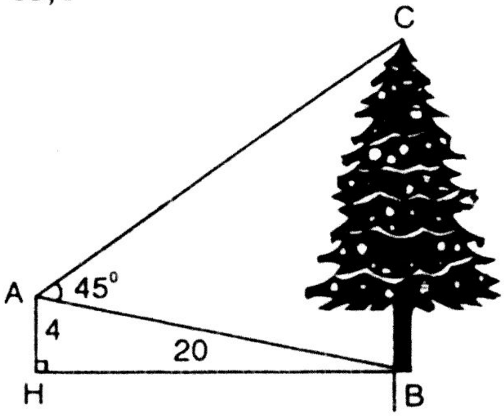
$= 3^2 + 4^2 - 2.3.4.\cos 140^\circ \approx 43,4$

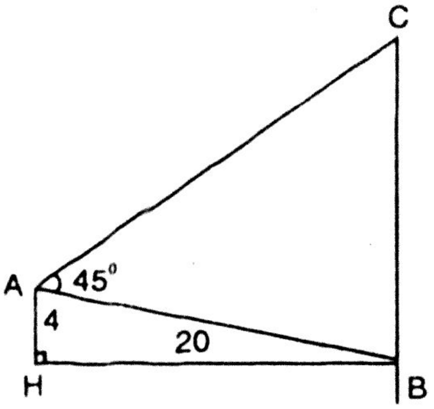
$\Rightarrow OC \approx 6,6N$

Vậy cường độ của lực tổng hợp là: 6,6N

37. *Từ vị trí A người ta quan sát một cây cao (hình vẽ). Biết AH = 4m, HB = 20m, $\widehat{BAC} = 45^0$. Tính chiều cao của cây.*

● ***Giải***





Ta có : Tam giác AHB vuông tại H nên :

$AB^2 = AH^2 + HB^2 = 4^2 + 20^2 = 416$

$\Rightarrow AB \approx 20,4$

$$\tan\widehat{BAH} = \frac{HB}{HA} = \frac{20}{4} = 5$$

$\Rightarrow \widehat{BAH} \approx 78,7^\circ$

$\Rightarrow \widehat{HAC} \approx 78,7^\circ + 45^\circ \approx 123,7^\circ$

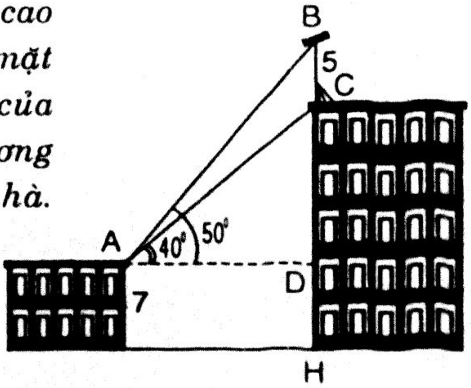
$\Rightarrow \widehat{BCA} = 180^\circ - 123,7^\circ = 56,3^\circ$.

Ta có : $$\frac{BC}{\sin 45^0} = \frac{AB}{\sin 56,3^0}$$

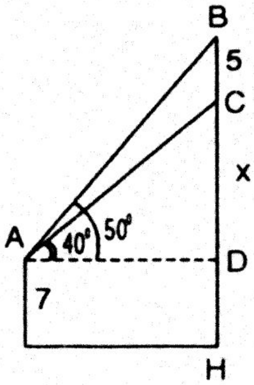
$$\Rightarrow BC = \frac{20,4}{\sin 56,3^0}.\sin 45^\circ \approx 17,4\ (m)$$

Vậy cây cao 17,4m.

38. *Trên nóc một tòa nhà có một cây ăngten cao 5m. Từ vị trí quan sát A cao 7m so với mặt đất, có thể nhìn thấy đỉnh B và chân C của cột ăngten dưới góc 50° và 40° so với phương nằm ngang. Tính chiều cao của tòa nhà. (hình vẽ).*



- ***Giải***



Đặt CD = x, ta có :

$$\tan 40^0 = \frac{x}{AD};\tan 50^0 = \frac{BD}{AD} = \frac{x+5}{AD}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x+5}{x} = \frac{\tan 50^0}{\tan 40^0} \approx 1{,}42$$

$$\Rightarrow \quad 0{,}42.x = 5 \quad \Rightarrow x = 11{,}9$$

Vậy chiều cao toà nhà là :

$$HC = HD + DC = 18{,}9m$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC có $b + c = 2a$.

Chứng minh rằng : a) $\sin B + \sin C = 2\sin A$

b) $\frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{2}{h_a}$

2. Chứng minh rằng mọi tam giác ABC ta đều có:

$$m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$$

3. Cho tam giác ABC thỏa $a = b\cos C$. Chứng minh tam giác ABC vuông.

- ***Hướng dẫn***. Áp dụng định lí cosin.

4. Cho tam giác ABC thỏa điều kiện $\frac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} = a^2$.

Chứng minh $\widehat{A} = 60^0$

5. Cho tam giác ABC có trung tuyến $AM = \frac{c}{2}$.

Chứng minh rằng $2b^2 = a^2 - c^2$ và $\sin^2 A = 2\sin^2 B + \sin^2 C$

6. Giải tam giác ABC, biết:

a) $b = 14$, $c = 10$, $\widehat{A} = 145^0$

b) $a = 7$, $b = 9$, $c = 10$

ÔN TẬP CHƯƠNG II

A. BÀI TẬP CHƯƠNG II

1. Chứng minh các công thức sau:

a) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)$

b) $\vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)$

- ***Giải***

a) Ta có: $|\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}-\vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 - 2\vec{a}\vec{b} + |\vec{b}|^2$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)$$

b) Ta có: $|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2 = (\vec{a}+\vec{b})^2 - (\vec{a}-\vec{b})^2$

$$= (\vec{a}+\vec{b}-\vec{a}+\vec{b})(\vec{a}+\vec{b}+\vec{a}-\vec{b}) = 4\cdot\vec{a}\cdot\vec{b}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{a}\cdot\vec{b} = \frac{1}{4}(|\vec{a}+\vec{b}|^2 - |\vec{a}-\vec{b}|^2)$$

2. *Gọi G là trọng tâm tam giác ABC.*

a) Chứng minh rằng với mọi điểm M, ta luôn có :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2$$

b) Tìm tập hợp các điểm M sao cho $MA^2 + MB^2 + MC^2 = K^2$, trong đó K là một số cho trước.

- ***Giải***

a) Ta có

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 \\ &= (\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GB} - \overrightarrow{GM})^2 + (\overrightarrow{GC} - \overrightarrow{GM})^2 \\ &= \overrightarrow{GA}^2 + \overrightarrow{GB}^2 + \overrightarrow{GC}^2 + 3\overrightarrow{MG}^2 - 2\overrightarrow{GM}(\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) \\ &= 3MG^2 + GA^2 + GB^2 + GC^2 \end{aligned}$$

b) Áp dụng câu a) ta có

$MA^2 + MB^2 + MC^2 = K^2 \Leftrightarrow 3MG^2 = K^2 - (GA^2 + GB^2 + GC^2)$

- Nếu $K^2 > GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm G bán kính $\sqrt{\frac{1}{3}\left[K^2 - \left(GA^2 + GB^2 + GC^2\right)\right]}$
- Nếu $K^2 = GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M chỉ gồm một phần tử là G.
- Nếu $K^2 < GA^2 + GB^2 + GC^2$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng.

3. *Cho hình bình hành ABCD. Tìm tập hợp các điểm M sao cho* $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2$*, trong đó k là một số cho trước.*

● ***Giải.*** Gọi O là tâm của hình bình hành ABCD, ta có:

$$\begin{aligned} MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 &= \overrightarrow{MA}^2 + \overrightarrow{MB}^2 + \overrightarrow{MC}^2 + \overrightarrow{MD}^2 \\ &= (\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OM})^2 + (\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OM})^2 \\ &= OA^2 + OB^2 + OC^2 + OD^2 + 4OM^2 - 2\overrightarrow{OM}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}) \\ &= 2(OA^2 + OB^2) + 4OM^2 \end{aligned}$$

Do đó: $MA^2 + MB^2 + MC^2 + MD^2 = k^2 \Leftrightarrow 4OM^2 = k^2 - 2(OA^2 + OB^2)$

Nếu $k^2 > 2(OA^2 + OB^2)$ thì tập hợp các điểm M là đường tròn tâm O bán kính

$$\sqrt{\frac{1}{4}[k^2 - 2(OA^2 + OB^2)]}$$

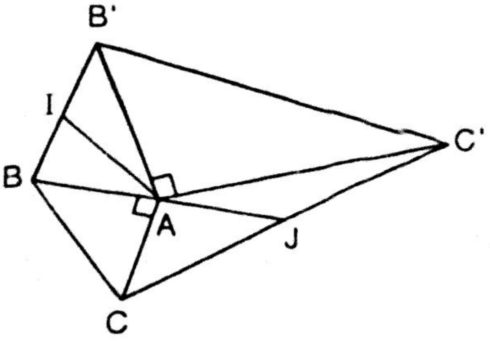
Nếu $k^2 = 2(OA^2 + OB^2)$ thì tập hợp các điểm M chỉ gồm một điểm O.

Nếu $k^2 < 2(OA^2 + OB^2)$ thì tập hợp các điểm M là tập rỗng.

4. *Cho hai tam giác vuông cân ABC và AB'C' có chung đỉnh A. Gọi I và J lần lượt là trung điểm của hai đoạn thẳng BB' và CC'. Chứng minh rằng:*

a) $AI \perp CC'$; $AJ \perp BB'$.

b) $BC' \perp B'C$



● ***Giải***

a) Ta có: $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})$; $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'})$

$$\Rightarrow \quad \overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CC'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB'})\cdot(\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC})$$

Vì $AB \perp AC$ và $AB' \perp AC'$ nên $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC'} = 0$.

Mặt khác: $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = AB\cdot AC'.\cos\widehat{BAC'}$

$\overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC} = AB'\cdot AC.\cos\widehat{B'AC}$

$\Rightarrow$ $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC'} = \overrightarrow{AB'}\cdot\overrightarrow{AC}$ do đó $\overrightarrow{AI}\cdot\overrightarrow{CC'} = 0 \Rightarrow AI \perp CC'$

Tương tự: $\overrightarrow{AJ}\cdot\overrightarrow{BB'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AC'})\cdot(\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB})$

$$= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB}) = 0$$

$\Rightarrow$ $AJ \perp BB'$

b) Ta có : $\overrightarrow{BC'}\cdot\overrightarrow{B'C} = (\overrightarrow{AC'} - \overrightarrow{AB})\cdot(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB'})$

$$= \overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AC'}\cdot\overrightarrow{AB'} - \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} = 0$$

(Do $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'} = AB\cdot AB'.\cos\widehat{BAB'}, \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AC'}$

$$= AC\cdot AC'.\cos(180^0 - \widehat{BAB'}) = -\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AB'})$$

Vậy $BC' \perp B'C$.

5. *Cho hình vuông ABCD cạnh a. Gọi N là trung điểm của CD, M là điểm trên AC sao cho* $AM = \frac{1}{4}AC$.

a) Tính các cạnh của tam giác BMN.

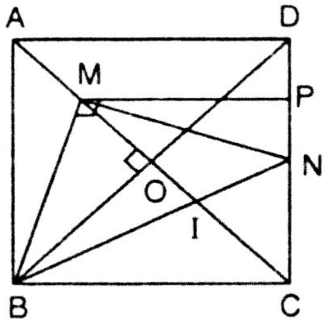
b) Có nhận xét gì về tam giác BMN ? Tính diện tích tam giác đó.

c) Gọi I là giao điểm của BN và AC. Tính CI.

d) Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN.

- ***Giải***

a) Gọi O là tâm của hình vuông ABCD, thì M là trung điểm AO.



Ta có : $BN^2 = BC^2 + NC^2$

$$= a^2 + \frac{a^2}{4} = \frac{5a^2}{4} \Rightarrow BN = \frac{a\sqrt{5}}{4}$$

$$BM^2 = BO^2 + OM^2$$

$$= \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{4}\right) = \frac{5a^2}{8}$$

$$\Rightarrow BM = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

Kẻ MP // AD ta có :

$$MN^2 = MP^2 + PN^2 = \left(\frac{3a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4}\right)^2 = \frac{10a^2}{16} \Rightarrow MN = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

b) Ta có: MB = MN và $BN^2 = MB^2 + MN^2$ nên tam giác BMN vuông cân tại M.

Diện tích tam giác BMN là:

$$S_{BMN} = \frac{1}{2}MN^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{10a^2}{16} = \frac{5a^2}{16}$$

c) Ta có: I là trọng tâm tam giác BCD nên $IC = \frac{2}{3}IO = \frac{2}{3}\cdot a\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{a\sqrt{2}}{3}$

d) Gọi R là bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác BDN.

Áp dụng định lí sin ta có :

$$\frac{BN}{\sin\widehat{BDN}} = 2R \Rightarrow R = \frac{BN}{2\sin 45^0} = \frac{a\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$$

6. *Trong mặt phẳng toạ độ cho* $\vec{e} = (4;\ 1)$ *và* $\vec{f} = (1;\ 4)$.

a) Tìm góc giữa các vectơ $\vec{e}$ *và* $\vec{f}$.

b) Tìm m để vectơ $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f}$ *vuông góc với trục hoành.*

c) Tìm n để vectơ $\vec{b} = n\vec{e} + \vec{f}$ *tạo với vectơ* $\vec{i} + \vec{j}$ *một góc* 45^0.

● ***Giải***

a) Góc giữa các vectơ $\vec{e}$ và $\vec{f}$.

$$\cos(\vec{e},\vec{f}) = \frac{\vec{e}\cdot\vec{f}}{|\vec{e}|\cdot|\vec{f}|} = \frac{4.1 + 1.4}{\sqrt{4^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+4^2}} = \frac{8}{17}$$

$$\Rightarrow \quad (\vec{e},\vec{f}) \approx 61^\circ 56'$$

b) Ta có: $\vec{a} = \vec{e} + m\vec{f} = (4 + m;\ 1 + 4m)$.

$\vec{a}$ vuông góc trục hoành $\Leftrightarrow \vec{a}\cdot\vec{i} = 0 \Leftrightarrow 4 + m = 0 \Leftrightarrow m = -4$

c) $\quad \vec{b} = (4n + 1;\ n + 4)\ ;\ \vec{i} + \vec{j} = (1;\ 1)$.

$$(\vec{b}\,;\vec{i}+\vec{j}) = 45^0 \Rightarrow \cos 45^0 = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{i}+\vec{j})}{|\vec{b}|.|\vec{i}+\vec{j}|}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{(4n+1)+(n+4)}{\sqrt{(4n+1)^2+(n+4)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$\Rightarrow (4n + 1)^2 + (n + 4)^2 = (5n + 5)^2$$

$$\Rightarrow 8n^2 + 34n + 8 = 0 \Rightarrow n = -\frac{1}{4};\ n = -4.$$

Thử lại với n = −4 ta có : $\vec{b} = (-15;0)$.

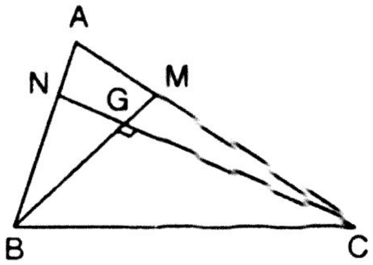
$$\cos(\vec{b}\,;\vec{i}+\vec{j}) = \frac{\vec{b}\cdot(\vec{i}+\vec{j})}{|\vec{b}|.|\vec{i}+\vec{j}|} = \frac{-15}{15\cdot\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{(loại)}$$

Với $n = -\frac{1}{4};\ \vec{b} = \left(0;\frac{15}{4}\right)$

$$\cos(\vec{b}\,;\vec{i}+\vec{j}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ (nhận). Vậy } n = -\frac{1}{4}.$$

7. *Cho tam giác ABC.Chứng minh rằng điều kiện cần và đủ để hai trung tuyến kẻ từ B và C vuông góc với nhau là*

$$b^2 + c^2 = 5a^2.$$



● ***Giải***

Gọi G là giao điểm của hai trung tuyến BM và CN.

Áp dụng công thức tính trung tuyến, ta có :

$$GB^2 = \frac{4}{9}BM^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2)$$

$$GC^2 = \frac{4}{9}CN^2 = \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Do đó : $BM \perp CN \Leftrightarrow BG^2 + CG^2 = BC^2$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{9}(2a^2 + 2c^2 - b^2) + \frac{1}{9}(2a^2 + 2b^2 - c^2) = a^2$$

$$\Leftrightarrow 4a^2 + b^2 + c^2 = 9a^2 \Leftrightarrow b^2 + c^2 = 5a^2$$

8. *Trong các tam giác có hai cạnh là a và b, tìm tam giác có diện tích lớn nhất.*

- ***Giải***. Ta có diện tích tam giác ABC là $S = \frac{1}{2}ab\sin C$

Mà $\sin C \le 1$ nên $S \le \frac{1}{2}ab$, do đó S lớn nhất

Khi $\sin C = 1$, tức tam giác ABC vuông tại C.

9. *Cho tam giác ABC có a = 12, b = 16, c = 20. Tính diện tích S, chiều cao h_a, các bán kính R, r của đường tròn ngoại tiếp, nội tiếp tam giác đó.*

- ***Giải***. Ta có : $p = \frac{a+b+c}{2} = \frac{12+16+20}{2} = 24$

Áp dụng công thức Hêrông.

Ta có: $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{24.12.8.4} = 96$

$$S = \frac{1}{2}a.h_a \Rightarrow h_a = \frac{2S}{a} = \frac{2.96}{12} = 16$$

$$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4S} = \frac{12.16.20}{4.96} = 10$$

$$S = p.r \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{96}{24} = 4$$

10. *Cho tam giác ABC chứng minh rằng:*

a) $\cot A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ *(S là diện tích tam giác ABC)*

b) $\cot A + \cot B + \cot C = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}$.

- ***Giải***

a) Ta có : $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$; $S = \frac{1}{2}bc.\sin A$.

$$\Rightarrow \cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc.\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$$

b) Tương tự a)

Ta có $\cot B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{4S}$; $\cot C = \dfrac{a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

Suy ra : $\cot A + \cot B + \cot C = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + c^2 - b^2 + a^2 + b^2 - c^2}{4S}$

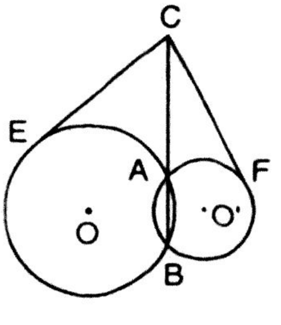
$$= \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4S}.$$

11. *Cho hai đường tròn (O; R) và (O'; R') cắt nhau tại hai điểm A và B. Trên đường thẳng AB, lấy điểm C ở ngoài hai đường tròn và kẻ hai tiếp tuyến CE, CF đến hai đường tròn đó (E, F là các tiếp điểm). Chứng minh rằng CE = CF.*

- ***Giải***

Ta có: $\mathscr{P}_{C/(O)} = CA.CB = CE^2$ (1)

$\mathscr{P}_{C/(O')} = CA.CB = CF^2$ (2)



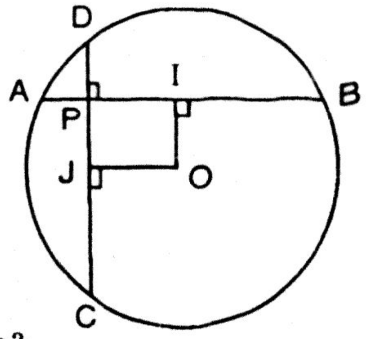
Từ (1) và(2) suy ra CE = CF.

12. *Cho đường tròn (O; R) và một điểm P cố định ở bên trong đường tròn đó. Hai dây cung thay đổi AB và CD luôn đi qua P và vuông góc với nhau.*

a) Chứng minh rằng $AB^2 + CD^2$ không đổi.

b) Chứng minh rằng $PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2$ không phụ thuộc vào vị trí của điểm P.

- ***Giải***



a) Gọi I, J lần lượt là trung điểm của AB, CD.

Ta có $OI \perp AB$, $OJ \perp CD$

$\Rightarrow$ PIOJ là hình chữ nhật.

Ta có : $AB^2 + CD^2 = 4(AI^2 + CJ^2)$

$= 4(OA^2 - IO^2 + OC^2 - JO^2)$

$= 4(2R^2 - OP^2)$(không đổi)

b) Ta có :

$PA^2 + PB^2 + PC^2 + PD^2 = (\overrightarrow{PA} - \overrightarrow{PB})^2 + (\overrightarrow{PC} - \overrightarrow{PD})^2 + 2\overrightarrow{PA}.\overrightarrow{PB} + 2\overrightarrow{PC}.\overrightarrow{PD}$

$= AB^2 + CD^2 + 4(PO^2 - R^2)$

$= 4(2R^2 - OP^2) + 4(PO^2 - R^2) = 4R^2$

không phụ thuộc vào điểm P.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. *Giá trị $\cos 45^0 + \sin 45^0$ bằng bao nhiêu ?*

(A) 1 *(B)* $\sqrt{2}$ *(C)* $\sqrt{3}$ *(D)* 0

- ***Trả lời.*** Ta có: $\cos 45^0 + \sin 45^0 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$. **Chọn (B).**

2. *Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào đúng ?*

(A) $\sin(180^0 - \alpha) = -\cos\alpha$ (B) $\sin(180^0 - \alpha) = -\sin\alpha$

(C) $\sin(180^0 - \alpha) = \sin\alpha$ (D) $\sin(180^0 - \alpha) = \cos\alpha$

- ***Trả lời***. **Chọn (C).**

3. *Trong các đẳng thức sau, đẳng thức nào sai ?*

(A) $\sin 0^0 + \cos 0^0 = 0$ (B) $\sin 90^0 + \cos 90^0 = 1$

(C) $\sin 180^0 + \cos 180^0 = -1$ (D) $\sin 60^0 + \cos 60^0 = \dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

- ***Trả lời.*** Ta có : $\sin 0^0 + \cos 0^0 = 1$. **Chọn (A).**

4. *Trong các hệ thức sau, hệ thức nào không đúng ?*

(A) $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + 2\sin\alpha\cos\alpha$

(B) $(\sin\alpha - \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin\alpha\cos\alpha$

(C) $(\cos^4\alpha - \sin^4\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

(D) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = 1$

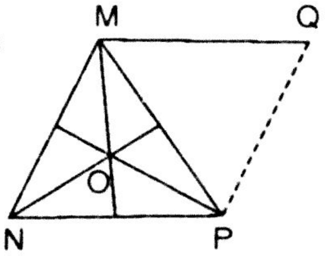
- ***Trả lời.*** Ta có : $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha = (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha)^2 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

$= 1 - 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$. **(Chọn D).**

5. *Cho O là tâm đường tròn ngoại tiếp tam giác đều MNP. Góc nào sau đây bằng 120^0?*

(A) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP})$ (B) $(\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{ON})$

(C) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{OP})$ (D) $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MP})$



- ***Trả lời***. Vẽ $\overrightarrow{MQ} = \overrightarrow{NP}$; $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{NP}) = (\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{MQ}) = 120^0$. **Chọn (A).**

6. *Cho M, N, P, Q là bốn điểm tuỳ ý. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào sai?*

(A) $\overrightarrow{MN}(\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{PQ}) = \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{NP} + \overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ}$

(B) $\overrightarrow{MP}\cdot\overrightarrow{MN} = -\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MP}$

(C) $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{MN}$

(D) $(\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{PQ})(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ}) = MN^2 - PQ^2$

- ***Trả lời.*** **Chọn (B)**

7. *Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?*

(A) $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = |\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$ (B) $\sqrt{\vec{a}^2} = |\vec{a}|$

(C) $\sqrt{\vec{a}^2} = \vec{a}$ (D) $\vec{a} = \pm|\vec{a}|$

- ***Trả lời.*** Ta có : $\sqrt{\vec{a}^2} = \sqrt{|\vec{a}|^2} = |\vec{a}|$. **Chọn (B).**

8. *Trong mặt phẳng toạ độ, cho $\vec{a} = (3; 4)$, $\vec{b} = (4; -3)$. Kết luận nào sau đây là sai ?*

(A) $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ *(B)* $\vec{a} \perp \vec{b}$ *(C)* $|\vec{a}\cdot\vec{b}| = 0$ *(D)* $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = 0$

● ***Trả lời.*** Ta có : $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}| = \sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{4^2+(-3)^2} = 25$. **Chọn (D).**

9. *Trong mặt phẳng tọa độ, cho $\vec{a} = (9;\ 3)$. Vectơ nào sau đây không vuông góc với vectơ $\vec{a}$?*

(A) $\vec{v} = (1; -3)$ *(B)* $\vec{v} = (2; -6)$

(C) $\vec{v} = (1; 3)$ *(D)* $\vec{v} = (-1; 3)$

● ***Trả lời.*** Ta có: $\vec{v} = (1;\ 3)$ không vuông góc với vectơ $\vec{a}$. **Chọn (C).**

10. *Tam giác ABC có a = 14, b = 18, c = 20. Kết quả nào sau đây là gần đúng nhất ?*

(A) $\widehat{B} \approx 42^0 50'$ *(B)* $\widehat{B} \approx 60^0 56'$ *(C)* $\widehat{B} \approx 119^0 04'$ *(D)* $\widehat{B} \approx 90^0$

● ***Trả lời.*** Ta có : $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{14^2 + 20^2 - 18^2}{2.14.20} \approx 0,49$

$\Rightarrow\quad B \approx 60^\circ 56'$. **Chọn (B).**

11. *Nếu tam giác MNP có MP = 5, PN = 8 và $\widehat{MPN} = 120^0$ thì độ dài cạnh MN (làm tròn đến chữ số thập phân thứ nhất) là:*

(A) 11,4 *(B)* 12,4 *(C)* 7,0 *(D)* 12,0

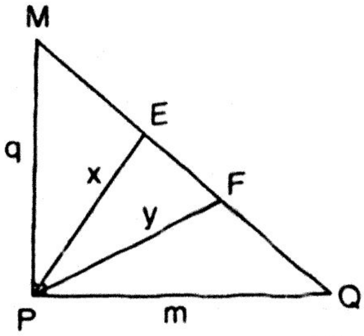
● ***Trả lời.*** $MN^2 = MP^2 + NP^2 - 2MP\cdot NP\cdot\cos\widehat{MPN}$

$= 5^2 + 8^2 - 2.5.8.\cos 120^0 = 129 \Rightarrow MN \approx 11,4$. **Chọn (A).**

12. *Cho tam giác MPQ vuông tại P. Trên cạnh MQ lấy hai điểm E, F sao cho các góc MPE, EPF, FPQ bằng nhau. Đặt MP = q, PQ = m, PE = x, PF = y. Trong các hệ thức sau, hệ thức nào đúng ?*

(A) $ME = EF = FQ$ *(B)* $ME^2 = q^2 + x^2 - xq$

(C) $MF^2 = q^2 + y^2 - yq$ *(D)* $MQ^2 = q^2 + m^2 - 2qm$



● ***Trả lời.***

Ta có : $MF^2 = MP^2 + FP^2 - 2MP\cdot FP\cdot\cos\widehat{MQF}$

$= q^2 + y^2 - 2qy.\cos 60^0$

$= q^2 + y^2 - qy$. **Chọn (C)**

13. *Tam giác ABC có BC = 10, $\widehat{A} = 30^0$. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC bằng bao nhiêu ?*

(A) 5; *(B)* 10 ; *(C)* $\dfrac{10}{\sqrt{3}}$; *(D)* $10\sqrt{10}$

● ***Trả lời.*** Ta có: $\dfrac{a}{\sin A} = 2R \Rightarrow R = \dfrac{a}{2\sin A} = \dfrac{10}{2\sin 30^0} = 10$. **Chọn (B).**

14. *Tam giác ABC với ba cạnh là 5, 12, 13 có diện tích bằng bao nhiêu ?*

(A) 30 *(B)* $20\sqrt{2}$ *(C)* $10\sqrt{3}$ *(D)* 20

- ***Trả lời***. Ta có: $5^2 + 12^2 = 13^2$ nên ΔABC vuông.

Diện tích $S = \frac{1}{2}.5.12 = 30$. **Chọn (A).**

15. Tam giác ABC có ba cạnh là 6, 10, 8. Bán kính đường tròn nội tiếp tam giác đó bằng bao nhiêu ?

(A) $\sqrt{3}$ *(B) 4* *(C) 2* *(D) 1*

- ***Trả lời***. Ta có: $6^2 + 8^2 = 10^2$ nên ΔABC vuông có cạnh huyền bằng 10.

Diện tích $S = \frac{1}{2}.6.8 = 24$

$P = \frac{6+10+8}{2} = 12 \Rightarrow r = \frac{S}{p} = \frac{24}{12} = 2$. **Chọn (C).**

16. Tam giác ABC có $\widehat{B} = 60^0, \widehat{C} = 45^0$, AB = 5. Hỏi cạnh AC bằng bao nhiêu?

(A) $5\sqrt{3}$ *(B) $5\sqrt{2}$* *(C) $\frac{5\sqrt{6}}{2}$* *(D) 10*

- ***Trả lời***. Ta có : $\frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = \frac{5}{\sin 45^0} = 5\sqrt{2}$

$$\Rightarrow b = AC = 5\sqrt{2}.\sin 60^0 = \frac{5\sqrt{6}}{2}$$ **Chọn (C).**

C BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC có hai đường trung tuyến BM = 6, CN = 9 và $\widehat{BGC} = 120^0$, với G là trọng tâm ΔABC. Tính các cạnh của ΔABC.

2. Cho ΔABC, l_a là phân giác trong góc A. Chứng minh rằng:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\cdot\sqrt{bcp(p-a)}$$

3. Cho ΔABC có diện tích S.

   a) Chứng minh rằng: $16S^2 = 2a^2b^2 + 2b^2c^2 + 2c^2a^2 - a^4 - b^4 - c^4$.

   b) Chứng minh $a^4 + b^4 + c^4 \geq 16\cdot S^2$

4. Cho ΔABC có các trung tuyến m_b, m_c thỏa $\frac{c}{b} = \frac{m_b}{m_c} \neq 1$

   Chứng minh rằng: a) $b^2 + c^2 = 2a^2$; b) $2\cot A = \cot B + \cot C$.

5. Cho ΔABC nội tiếp đường tròn (O) bán kính R có độ dài ba cạnh là a, b, c. Gọi G, H, I lần lượt là trọng tâm, trực tâm, tâm đường tròn nội tiếp tam giác ABC. Tính phương tích của các điểm G, H, I đối với đường tròn (O).

Đáp số: $\mathscr{P}_{G/(O)} = -\frac{1}{9}(a^2 + b^2 + c^2)$; $\mathscr{P}_{H/(O)} = 8R^2 - (a^2 + b^2 + c^2)$

$\mathscr{P}_{I/(O)} = -\frac{abc}{a+b+c}$.

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TỌA ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. PHƯƠNG TRÌNH TỔNG QUÁT CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phương trình tổng quát của đường thẳng

- Vectơ $\vec{n}$ khác $\vec{0}$ có giá vuông góc với đường thẳng Δ gọi là vectơ pháp tuyến của đường thẳng Δ.
- Mọi đường thẳng đều có phương trình tổng quát dạng $ax + by + c = 0$, với $a^2 + b^2 \neq 0$ và $\vec{n} = (a; b)$ là vectơ pháp tuyến.

2. Các dạng đặc biệt của phương trình tổng quát

- Đường thẳng $by + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Ox.
- Đường thẳng $ax + c = 0$ song song hoặc trùng với trục Oy.
- Đường thẳng $ax + by = 0$ đi qua gốc toạ độ O.
- Đường thẳng có phương trình $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$ $(a \neq 0, b \neq 0)$ đi qua hai điểm A(a; 0) và B(0; b) và gọi là phương trình đường thẳng theo đoạn chắn.
- Nếu $b \neq 0$ thì phương trình đường thẳng có thể đưa về dạng $y = kx + m$; k là hệ số góc của Δ.
- Ý nghĩa hình học của hệ số góc.

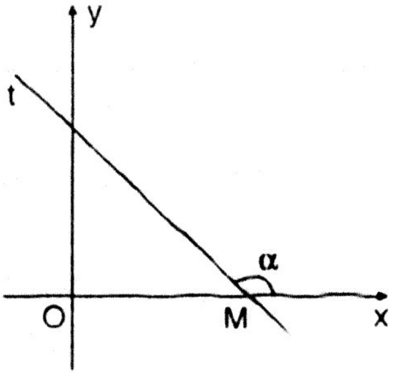
  Xét Δ: $y = kx + m$.

  - Với $k \neq 0$: M là giao điểm của Δ với Ox.

    Mt là tia của Δ nằm phía trên Ox.

    α là góc hợp bởi hai tia Mt và Mx

    thì $k = \tan\alpha$.
  - Với $k = 0$ thì Δ song song hoặc trùng với Ox.



3. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Cho Δ_1: $a_1x + b_1y + c_1 = 0$

Δ_2: $a_2x + b_2y + c_2 = 0$

- Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} \neq 0$

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0 \\ \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} \neq 0 \end{cases}$

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & a_1 \\ c_2 & a_2 \end{vmatrix} = 0$

Trường hợp a_2, b_2, c_2 đều khác 0, thì:

- Δ_1, Δ_2 cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$

- $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2}$

- $\Delta_1 \equiv \Delta_2 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

1. *Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng ?*

a) Đường thẳng song song hoặc trùng với trục Ox có phương trình $y = m$.

b) Đường thẳng có phương trình $x = m^2 + 1$ *song song với trục Oy.*

c) Phương trình $y = kx + b$ *là phương trình của đường thẳng.*

d) Mọi đường thẳng đều có phương trình dạng $y = kx + b$.

e) Đường thẳng đi qua hai điểm A (a; 0) và B (0; b) có phương trình $\dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b} = 1$.

- ***Trả lời.*** Các mệnh đề đúng: a), b), c)

  Các mệnh đề sai : d), e)

2. *Viết phương trình tổng quát:*

a) Đường thẳng Ox.

b) Đường thẳng Oy.

c) Đường thẳng đi qua M $(x_0; y_0)$ *và song song với Ox.*

d) Đường thẳng đi qua M $(x_0; y_0)$ *và vuông góc với Ox.*

e) Đường thẳng OM với M $(x_0; y_0)$ *khác điểm O.*

- ***Giải***

a) Đường thẳng Ox đi qua O(0; 0) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 1)$ nên có phương trình tổng quát là: $0(x - 0) + 1(y - 0) = 0 \Leftrightarrow y = 0$

b) Đường thẳng Oy đi qua O(0; 0) có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0)$ nên có phương trình tổng quát là: $(x - 0) + 0(y - 0) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

c) Đường thẳng đi qua M $(x_0; y_0)$ và song song với Ox có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0; 1)$ nên có phương trình tổng quát là:

$$0(x - x_0) + 1(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow y = y_0. \ (y_0 \neq 0)$$

d) Đường thẳng đi qua M $(x_0; y_0)$ và vuông góc với Ox có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; 0)$ nên có phương trình tổng quát là:

$$1(x - x_0) + 0(y - y_0) = 0 \Leftrightarrow x = x_0.$$

e) Ta có : $\overrightarrow{OM} = (x_0; y_0)$. Vectơ $\vec{n} = (y_0; -x_0)$ vuông góc với vectơ $\overrightarrow{OM}$

Đường thẳng OM qua O có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (y_0; -x_0)$ nên có phương trình tổng quát là: $y_0(x - 0) - x_0(y - 0) = 0 \Leftrightarrow y_0.x - x_0.y = 0$

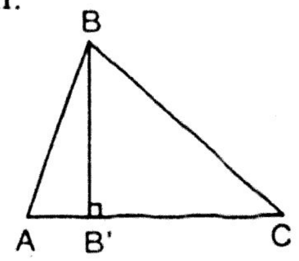
3. *Cho tam giác ABC có phương trình các đường thẳng AB, BC, CA là:*

AB : $2x - 3y - 1 = 0$; *BC* : $x + 3y + 7 = 0$; *CA* : $5x - 2y + 1 = 0$

Viết phương trình tổng quát của đường cao kẻ từ đỉnh B.

● ***Giải***. Tọa độ điểm B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 3y - 1 = 0 \\ x + 3y + 7 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x + 3y = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2 \\ y = -\dfrac{5}{3} \end{cases}$$



Vậy $B\left(-2; -\dfrac{5}{3}\right)$

Đường thẳng AC có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5; -2)$. Do đó đường cao kẻ từ đỉnh B có vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (2; 5)$, nên có phương trình tổng quát là:

$$2(x + 2) + 5\left(y + \frac{5}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y + \frac{37}{3} = 0$$

4. *Cho hai điểm P(4; 0), Q(0; –2).*

a) Viết phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua điểm A(3; 2) và song song với đường thẳng PQ.

b) Viết phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn PQ.

● ***Giải***

a) Áp dụng phương trình đường thẳng theo đoạn chắn ta có phương trình tổng quát của đường thẳng PQ là:

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{-2} = 1 \Leftrightarrow -2x + 4y = -8 \Leftrightarrow 2x - 4y - 8 = 0 \Leftrightarrow x - 2y - 4 = 0$$

Vectơ pháp tuyến của PQ là $\vec{n} = (1; -2)$

Đường thẳng qua A (3; 2) và song song với đường thẳng PQ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -2)$ nên có phương trình tổng quát là:

$$1(x - 3) - 2(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 1 = 0.$$

b) Ta có : $\overrightarrow{PQ} = (-4; -2)$ và I(2;–1) là trung điểm của PQ.

Đường trung trực của đoạn PQ qua I và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{PQ} = (-4;-2)$ nên có phương trình tổng quát là:

$$-4(x-2) - 2(y+1) = 0 \Leftrightarrow 2x + y - 3 = 0.$$

5. *Cho đường thẳng d có phương trình x – y = 0 và điểm M(2; 1).*

a) Viết phương trình đường thẳng đối xứng với đường thẳng d qua điểm M.

b) Tìm hình chiếu của điểm M trên đường thẳng d.

● ***Giải***

a) Đường thẳng d qua O(0; 0) và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (1; -1)$. Gọi $N(x_N; y_N)$ là điểm đối xứng của O qua M thì M là trung điểm của ON, ta có:

$$\begin{cases} x_M = \dfrac{x_O + x_N}{2} \\ y_M = \dfrac{y_O + y_N}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_N = 2x_M - x_O = 4 \\ y_N = 2y_M - y_O = 2 \end{cases} \text{ Vậy } N(4;\ 2)$$

Đường thẳng đối xứng với d qua M là đường thẳng đi qua N(4; 2) và song song với d nên có phương trình tổng quát là :

$$1.(x-4) - 1.(y-2) = 0 \Leftrightarrow x - y - 2 = 0.$$

b) Gọi d' là đường thẳng đi qua M và vuông góc với d thì d' có vectơ pháp tuyến $\vec{m} = (1; 1)$ do đó d' có phương trình tổng quát là:

$$1(x-2) + 1(y-1) = 0 \Leftrightarrow x + y - 3 = 0$$

Hình chiếu M' của M trên d có tọa độ là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{3}{2} \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \text{ Vậy } M'\left(\frac{3}{2};\frac{3}{2}\right)$$

6. *Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau và tìm giao điểm (nếu có) của chúng.*

a) 2x – 5y + 3 = 0 và 5x + 2y – 3 = 0

b) x – 3y + 4 = 0 và 0,5x – 1,5y + 4 = 0

c) 10x + 2y – 3 = 0 và 5x + y – 1,5 = 0

● ***Giải***

a) Ta có : $\dfrac{2}{5} \neq \dfrac{-5}{2}$ nên hai đường thẳng đã cho cắt nhau và tọa độ giao điểm là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x - 5y = -3 \\ 5x + 2y = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{9}{29} \\ y = \dfrac{21}{29} \end{cases} \text{ giao điểm là } \left(\frac{9}{29};\frac{21}{29}\right)$$

b) Ta có: $\frac{1}{0,5} = \frac{-3}{-1,5} \neq \frac{4}{4}$ nên hai đường thẳng đã cho song song.

c) Ta có: $\frac{10}{5} = \frac{2}{1} = \frac{-3}{-1,5}$ nên hai đường thẳng đã cho trùng nhau.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho tam giác ABC có phương trình cạnh AB là $5x - 3y + 2 = 0$. Các đường cao qua đỉnh A và B lần lượt là $4x - 3y + 1 = 0$, $7x + 2y - 22 = 0$. Lập phương trình tổng quát hai cạnh AC, BC và đường cao qua C.

- ***Hướng dẫn***

Gọi H là trực tâm tam giác ABC, $\{A\} = AB \cap AH \Rightarrow A(-1;-1)$

$\{B\} = AB \cap HB \Rightarrow B(2;4)$

AC: $2x - 7y - 5 = 0$; BC: $3x + 4y - 22 = 0$; CH: $3x + 5y - 23 = 0$

2. Viết phương trình tổng quát các cạnh của tam giác ABC nếu cho $B(-4 ; -5)$ và hai đường cao có phương trình là :

$$5x + 3y - 4 = 0 \text{ và } 3x + 8y + 13 = 0$$

- ***Hướng dẫn.*** Giả sử hai đường cao

AH : $3x + 8y + 13 = 0$; CK : $5x + 3y - 4 = 0$

AB qua A và vuông góc với CK nên AB : $3x - 5y - 13 = 0$

BC qua B và vuông góc với AH nên BC : $8x - 3y + 17 = 0$

AC : $5x + 2y - 1 = 0$

3. Cho ba trung điểm của ba cạnh của tam giác là: $M_1(2;\ 1)$, $M_2(5;\ 3)$, $M_3(3\ ;\ -4)$. Viết phương trình tổng quát các cạnh của tam giác.

4. Xét vị trí tương đối của các cặp đường thẳng sau đây, nếu chúng cắt nhau thì tìm tọa độ giao điểm.

a) $2x + 3y + 1 = 0$ và $4x + 5y - 6 = 0$

b) $4x - y + 2 = 0$ và $-8x + 2y + 1 = 0$

c) $3x - 2y + 1 = 0$ và $-6x + 4y - 2 = 0$

§2. PHƯƠNG TRÌNH THAM SỐ CỦA ĐƯỜNG THẲNG

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Vectơ chỉ phương của đường thẳng

Vectơ $\vec{u}$ khác $\vec{0}$ có giá song song hoặc trùng với đường thẳng Δ được gọi là vectơ chỉ phương của Δ.

2. **Phương trình tham số của đường thẳng**

Phương trình tham số của đường thẳng Δ đi qua $M(x_0; y_0)$ và có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (a;b)$ $(\vec{u} \neq \vec{0})$ có dạng: $\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \end{cases}$ $(a^2 + b^2 \neq 0)$

Nếu $a \neq 0$ và $b \neq 0$ thì phương trình $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y}{b}$ được gọi là phương trình chính tắc cua đường thẳng.

Nếu $a = 0$ và $b = 0$ thì đường thẳng không có phương trình chính tắc.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

7. *Cho đường thẳng :* $\Delta : \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -2t \end{cases}$. *Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai ?*

a) Điểm $A(-1; -4)$ *thuộc* Δ

b) Điểm $B(8; 14)$ *không thuộc* Δ*, điểm* $C(8; -14)$ *thuộc* Δ

c) Δ *có vectơ pháp tuyến* $\vec{n} = (1; 2)$

d) Δ *có vectơ chỉ phương* $\vec{u} = (1; -2)$

e) Phương trình $\frac{x - 8}{3} = \frac{y + 14}{-6}$ *là phương trình chính tắc của* Δ

f) Phương trình $\frac{x - 1}{1} = \frac{y}{-2}$ *là phương trình chính tắc của* Δ

- ***Trả lời.*** Các mệnh đề đúng là: b), d), e), f)

  Các mệnh đề sai là: a), c)

8. *Cho đường thẳng* Δ*:* $ax + by + c = 0$*. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

a) Vectơ $\vec{n} = (a; b)$ *là vectơ pháp tuyến của* Δ

b) Δ *có vectơ chỉ phương* $\vec{u} = (-b; a)$

c) Δ *có vectơ chỉ phương* $\vec{u} = (Kb; Ka)$ *với* $K \neq 0$

d) Δ *có vectơ chỉ phương* $\vec{u} = (5b; -5a)$

e) Đường thẳng vuông góc với Δ *có vectơ chỉ phương* $\vec{u} = (a; b)$

- ***Trả lời.*** Các mệnh đề đúng là : a), b), d), e)

  Các mệnh đề sai là: c).

9. *Hãy viết phương trình tham số, phương trình chính tắc (nếu có) và phương trình tổng quát của đường thẳng đi qua hai điểm A và B trong mỗi trường hợp sau:*

a) $A(-3; 0), B(0; 5)$ *b)* $A(4; 1), B(4; 2)$ *c)* $A(-4; 1), B(1; 4)$

- ***Giải***

a) Ta có $\overrightarrow{AB} = (3; 5)$

Phương trình tham số của đường thẳng cần tìm qua A(−3; 0) và có vectơ chỉ phương $\overrightarrow{AB} = (3; 5)$ là: $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 5t \end{cases}$

Phương trình chính tắc là : $\frac{x+3}{3} = \frac{y}{5}$

Phương trình tổng quát là : $5x - 3y + 15 = 0$

b) $\overrightarrow{AB} = (0; 1)$

Phương trình tham số của đường thẳng AB là $\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 + t \end{cases}$

Không có phương trình chính tắc.

Phương trình tổng quát là : $x - 4 = 0$

c) $\overrightarrow{AB} = (5; 3)$

Phương trình tham số của đường thẳng AB là: $\begin{cases} x = -4 + 5t \\ y = 1 + 3t \end{cases}$

Phương trình chính tắc là : $\frac{x+4}{5} = \frac{y-1}{3}$

Phương trình tổng quát là : $3x - 5y + 17 = 0$

10. *Cho điểm A(−5; 2) và đường thẳng* $\Delta: \frac{x-2}{1} = \frac{y+3}{-2}$

Hãy viết phương trình đường thẳng:

a) Đi qua A và song song với Δ.

b) Đi qua A và vuông góc với Δ.

- ***Giải***. Đường thẳng Δ có vectơ chỉ phương là: $\vec{u} = (1; -2)$

a) Đường thẳng đi qua A và song song với Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (1; -2)$ có phương trình chính tắc là: $\frac{x+5}{1} = \frac{y-2}{-2}$

b) Đường thẳng đi qua A và vuông góc với Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{u} = (1; -2)$ có phương trình tổng quát là:

$$1.(x + 5) - 2.(y - 2) = 0 \Leftrightarrow x - 2y + 9 = 0$$

11. *Xét vị trí tương đối của mỗi cặp đường thẳng sau đây và tìm toạ độ giao điểm (nếu có) của chúng:*

a) $\begin{cases} x = 4 - 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ *và* $\begin{cases} x = 8 + 6t' \\ y = 4 - 3t' \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$ và $\dfrac{x-4}{2} = \dfrac{y+7}{3}$

c) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -1 - t \end{cases}$ và $x + y - 4 = 0$

- ***Giải***

a) Phương trình tổng quát của hai đường thẳng đã cho là:

$$x + 2y - 14 = 0 \text{ và } x + 2y - 16 = 0$$

Ta có $\dfrac{1}{1} = \dfrac{2}{2} \neq \dfrac{-14}{-16}$. Hai đường thẳng song song.

b) Phương trình tổng quát của hai đường thẳng đã cho là :

$$2x - y - 13 = 0 \text{ và } 3x - 2y - 26 = 0$$

Ta có $\dfrac{2}{3} \neq \dfrac{-1}{-2}$. Hai đường thẳng cắt nhau tại (0; −13)

c) Phương trình tổng quát của hai đường thẳng đã cho là:

$x + y - 4 = 0$ và $x + y - 4 = 0$. Hai đường thẳng trùng nhau.

12. *Tìm hình chiếu vuông góc của điểm P(3; −2) trên đường thẳng Δ trong mỗi trường hợp sau.*

a) $\Delta : \begin{cases} x = t \\ y = 1 \end{cases}$; b) $\Delta : \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4}$ c) $\Delta : 5x - 12y + 10 = 0$

- ***Giải***

a) Δ : y = 1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (0;1)$

đường thẳng Δ' qua P và vuông góc với Δ có phương trình tổng quát

$$1(x-3) = 0 \quad \Leftrightarrow x = 3$$

hình chiếu của P trên Δ là Q(3; 1)

b) Δ có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (3;-4)$. Đường thẳng Δ' qua P và vuông góc với Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{u} = (3;-4)$ nên có phương trình tổng quát là:

$$\Delta': 3(x-3) - 4(y+2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad 3x - 4y - 17 = 0$$

Tọa độ hình chiếu Q của P trên Δ là nghiệm của phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x-1}{3} = \dfrac{y}{-4} \\ 3x - 4y - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4x - 3y + 4 = 0 \\ 3x - 4y - 17 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{67}{25} \\ y = -\dfrac{56}{25} \end{cases}$$

Vậy $Q\left(\dfrac{67}{25}; \dfrac{-56}{25}\right)$

c) Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (5;-12)$

Đường thẳng Δ' qua P và vuông góc với Δ có phương trình chính tắc là :

$$\frac{x-3}{5} = \frac{y+2}{-12} \Leftrightarrow -12x - 5y + 26 = 0 \qquad \Leftrightarrow 12x + 5y - 26 = 0$$

Tọa độ hình chiếu Q của P trên Δ là nghiệm của hệ phương trình

$$\begin{cases} 5x - 12y + 10 = 0 \\ 12x + 5y - 26 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{262}{169} \\ y = \dfrac{250}{169} \end{cases} \quad \text{Vậy } Q\left(\frac{262}{169};\frac{250}{169}\right)$$

13. *Trên đường thẳng Δ: x − y + 2 = 0, tìm điểm M cách đều hai điểm E(0; 4) và F(4; −9).*

- ***Giải.*** *Phương trình tham số của Δ là:* $\begin{cases} x = t \\ y = 2 + t \end{cases}$

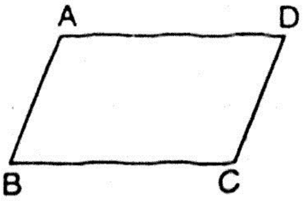
Giả sử $M(t; 2 + t) \in \Delta$ và EM = FM

$$\Leftrightarrow t^2 + (t-2)^2 = (t-4)^2 + (t+11)^2$$

$$\Leftrightarrow t^2 + t^2 - 4t + 4 = t^2 - 8t + 16 + t^2 + 22t + 121 \Leftrightarrow t = \frac{-133}{18}$$

Vậy $M\left(-\frac{133}{18};-\frac{97}{18}\right)$

14. *Cho hình bình hành có tọa độ một đỉnh là (4; −1). Biết phương trình hai cạnh là: x − 3y = 0 và 2x + 5y + 6 = 0. Tìm toạ độ ba đỉnh còn lại của hình bình hành đó.*



- ***Giải***. Giả sử hình bình hành ABCD có:

A(4; −1) và BC : x − 3y = 0; CD: 2x + 5y + 6 = 0

(Do A không nằm trên hai đường thẳng này)

Toạ độ đỉnh C là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 0 \\ 2x + 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{-18}{11} \\ y = \dfrac{-6}{11} \end{cases} \quad \text{Vậy } C\left(\frac{-18}{11};\frac{-6}{11}\right)$$

Đường thẳng AD qua A và song song với BC nên có phương trình:

$$1(x - 4) - 3(y + 1) = 0 \Leftrightarrow x - 3y - 7 = 0$$

Đường thẳng AB qua A và song song với CD nên có phương trình:

$$2(x - 4) + 5(y + 1) = 0 \Leftrightarrow 2x + 5y - 3 = 0$$

Tọa độ đỉnh B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 2x + 5y = 3 \\ x - 3y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = {}^{9}\!/_{11} \\ x = {}^{3}\!/_{11} \end{cases} \quad \text{Vậy } \left(\frac{9}{11}; \frac{3}{11}\right)$$

Tọa độ đỉnh D là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} x - 3y = 7 \\ 2x + 5y = -6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{17}{11} \\ y = \dfrac{-20}{11} \end{cases} \quad \text{Vậy } D\left(\frac{17}{11}; -\frac{20}{11}\right)$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho đường thẳng d : $x - 2y + 4 = 0$ và điểm A $(4; -1)$

a) Viết phương trình tham số và phương trình chính tắc (nếu có) của đường thẳng d.

b) Tìm toạ độ hình chiếu vuông góc A trên d.

c) Tìm toạ độ điểm đối xứng của A qua d.

- ***Đáp số***: b) $\left(\frac{14}{5}; \frac{17}{5}\right)$ c) $\left(\frac{8}{5}; \frac{29}{5}\right)$

2. Viết phương trình các cạnh của tam giác ABC nếu cho A $(1; 3)$ và hai đường trung tuyến có phương trình là : $x - 2y + 1 = 0$ và $y - 1 = 0$.

3. Cho tam giác ABC, có trung điểm một cạnh là $M(-1; 1)$ còn hai cạnh kia có phương trình là $x + y - 2 = 0$ và $2x + 6y + 3 = 0$. Xác định toạ độ các đỉnh của tam giác.

- ***Hướng dẫn.*** Giả sử M là trung điểm BC, hai cạnh có phương trình đã cho là AB, AC.

Xác định được A, các trung điểm M, P của các cạnh AB và AC.

§3. KHOẢNG CÁCH VÀ GÓC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Khoảng cách từ một điểm đến một đường thẳng

Cho đường thẳng Δ : $Ax + By + C = 0$ và $M(x_0; y_0)$.

Khoảng cách từ M đến Δ là: $d(M, \Delta) = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$

2. Phương trình các đường phân giác

Cho $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1 = 0$ và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$.

Phương trình hai đường phân giác của các góc tạo bởi Δ_1 và Δ_2 là:

$$\frac{A_1x+B_1y+C_1}{\sqrt{A_1^2+B_1^2}}=\pm\frac{A_2x+B_2y+C_2}{\sqrt{A_2^2+B_2^2}}$$

3. Góc giữa hai đường thẳng

Hai đường thẳng a và b cắt nhau tạo thành bốn góc.Số đo nhỏ nhất của các góc đó được gọi là số đo của góc giữa hai đường thẳng a và b,hay góc giữa a và b.

Khi a song song hoặc trùng với b ta quy ước góc giữa chúng bằng 0^0

Cho $\Delta_1 : A_1x + B_1y + C_1$ và $\Delta_2 : A_2x + B_2y + C_2 = 0$

α là góc giữa Δ_1 và Δ_2 thì $\cos\alpha = \dfrac{|A_1A_2+B_1B_2|}{\sqrt{A_1^2+B_2^2}\cdot\sqrt{A_2^2+B_2^2}} = |\cos(\vec{n}_1,\vec{n}_2)|$

Đặc biệt : $\Delta_1 \perp \Delta_2 \Leftrightarrow A_1A_2 + B_1B_2 = 0$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

15. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?*

a) cosin của góc giữa hai đường thẳng a và b bằng cosin của gcc giữa hai vectơ chỉ phương của chúng.

b) Nếu hai đường thẳng Δ và Δ' lần lượt có phương trình: $px + y + m = 0$ và $x + py + n = 0$ thì: $\cos(\Delta,\Delta') = \dfrac{2|p|}{p^2+1}$

c) Trong tam giác ABC ta có $\cos A = \cos(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC})$

d) Nếu φ là góc giữa hai đường thẳng chứa hai cạnh AB, AC của tam giác ABC thì $\cos\varphi = \dfrac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}$

e) Hai điểm (7; 6) và (–1; 2) nằm về hai phía của đường thẳng $y = x$.

- ***Trả lời.*** Các mệnh đề đúng là b), c), e).

  Các mệnh đề sai là a), d)

16. *Cho ba điểm A(4; –1), B(–3; 2), C(1; 6). Tính góc BAC và góc giữa hai đường thẳng AB, AC.*

- ***Giải.*** Ta có: $\overrightarrow{AB} = (-7;3)$; $\overrightarrow{AC} = (-3;7)$

$$\cos\widehat{BAC} = \cos\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right) = \frac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{AB\cdot AC}$$

$$= \frac{(-7)(-3)+3\cdot 7}{\sqrt{7^2+3^2}\cdot\sqrt{3^2+7^2}} = \frac{42}{58} = \frac{21}{29}$$

$$\Rightarrow \quad \widehat{BAC} \approx 43^o36'.$$

Góc giữa hai đường thẳng AB và AC là $43^036'$ (vì góc BAC nhọn).

17. Viết phương trình đường thẳng song song và cách đường thẳng $ax + by + c = 0$ một khoảng bằng h cho trước.

● ***Giải.*** Gọi $\Delta : ax + by + c = 0$

Đường thẳng Δ' song song với đường thẳng Δ đã cho có dạng

$$\Delta' : ax + by + c' = 0.$$

Lấy $M(x_0; y_0) \in \Delta$ ta có :

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \Rightarrow ax_0 + by_0 = -c$$

khoảng cách từ M đến Δ' bằng h nên:

$$h = \frac{|ax_0 + bx_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|c' - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \Rightarrow c' - c = \pm h\sqrt{a^2 + b^2}$$

$$\Rightarrow c' = c \pm h\sqrt{a^2 + b^2}$$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là:

$$ax + by + c + h\sqrt{a^2 + b^2} = 0; \quad ax + by + c - h\sqrt{a^2 + b^2} = 0$$

18. Cho ba điểm $A(3; 0)$, $B(-5; 4)$ và $P(10; 2)$. Viết phương trình đường thẳng đi qua P đồng thời cách đều A và B.

● ***Giải.*** Đường thẳng Δ đi qua P có dạng:

$$a(x - 10) + b(y - 2) = 0 \quad (\text{với } a^2 + b^2 \neq 0)$$

$$\Delta: \ ax + by - 10a - 2b = 0 \quad (*)$$

Ta có : $d(A, \Delta) = d(B, \Delta)$

$$\Leftrightarrow \frac{|3a + 0.b - 10a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-5a + 4b - 10a - 2b|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow |7a + 2b| = |15a - 2b| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 7a + 2b = 15a - 2b \\ 7a + 2b = -15a + 2b \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 8a - 4b = 0 \\ 22a = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 2a \\ a = 0 \end{array}\right.$$

* Với $b = 2a$, chọn $a = 1$, $b = 2$ ta có :

$\Delta : x + 2y - 14 = 0$ (thay $a = 1$, $b = 2$ vào $(*)$)

* Với $a = 0$, chọn $b = 1$ ta có :

$\Delta : y - 2 = 0$

19. Cho điểm $M(2; 3)$. Viết phương trình đường thẳng cắt hai trục toạ độ ở A và B sao cho ABM là tam giác vuông cân tại M.

● ***Giải.*** Giả sử $A(a; 0)$, $B(0; b)$ ta có: $\overrightarrow{MA} = (a - 2; -3)$; $\quad B = (-2; b - 3)$

$$\Delta ABM \text{ vuông cân tại } M \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \\ MA = MB \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -2(a-2)-3(b-3)=0 \\ (a-2)^2+9=4+(b-3)^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a+3b=13 & (1) \\ (a-2)^2+5=(b-3)^2 & (2) \end{cases}$$

Từ (1) suy ra $b = \dfrac{13-2a}{3}$ thay vào (2) ta được :

$$(a-2)^2+5=\left(\frac{13-2a}{3}-3\right)^2 \quad \Leftrightarrow a^2-4a+4+5=\frac{(4-2a)^2}{9}$$

$$\Leftrightarrow 9a^2-36a+81=16-16a+4a^2 \Leftrightarrow 5a^2-20a+65=0$$

Phương trình vô nghiệm.

Vậy không tồn tại tam giác ABM vuông cân tại M.

20. *Cho hai đường thẳng $\Delta_1 : x+2y-3=0$; $\Delta_2 : 3x-y+2=0$*

Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua điểm P(3;1) và cắt Δ_1, Δ_2 lần lượt ở A, B sao cho Δ tạo với Δ_1 và Δ_2 một tam giác cân có cạnh đáy là AB.

- ***Giải.*** Δ_1 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_1=(1;2)$

Δ_2 có vectơ pháp tuyến $\vec{n}_2=(3;-1)$

Giả sử Δ qua P có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(a;b)$; Δ cắt Δ_1, Δ_2 ở A và B sao cho tạo với Δ_1, Δ_2 một tam giác cân có đáy AB thì góc hợp bởi Δ với Δ_1 và góc hợp bởi Δ với Δ_2 bằng nhau.

Do đó: $\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}_1||\vec{n}|}=\dfrac{|\vec{n}_2\cdot\vec{n}|}{|\vec{n}_2||\vec{n}|} \Leftrightarrow \dfrac{|a+2b|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\dfrac{|3a-b|}{\sqrt{3^2+1^2}}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\,|a+2b| = |3a-b|$$

$$\Leftrightarrow 2(a+2b)^2=(3a-b)^2$$

$$\Leftrightarrow a^2-2ab-b^2=0$$

Chọn $b=1$ ta có $a^2-2a-1=0 \Leftrightarrow a=1\pm\sqrt{2}$

Vậy có hai đường thẳng cần tìm là :

$$\left(1+\sqrt{2}\right)(x-3)+(y-1)=0 \quad ; \left(1-\sqrt{2}\right)(x-3)+(y-1)=0$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm A(2; 1) và tạo với đường thẳng $2x+3y+4=0$ một góc 45^0.

- ***Hướng dẫn:*** Phương trình đường thẳng cần tìm có dạng:

$a(x-2)+b(y-1)=0$

Ta có: $\dfrac{|2a+3b|}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, suy ra a và b

Tìm được hai đường thẳng $x-5y+3=0$; $5x+y-11=0$

2. Cho hình vuông đỉnh $A(-4; 5)$ và một đường chéo đặt trên đường thẳng $7x - y + 8 = 0$. Viết phương trình các cạnh và đường chéo thứ hai của hình vuông.

- ***Hướng dẫn.*** Đường chéo AC: $x + 7y - 31 = 0$

Đường thẳng AB hợp với đường chéo AC một góc 45^0.

3. Cho hai điểm $P(2; 5)$ và $Q(5; 1)$.Viết phương trình đường thẳng đi qua P sao cho khoảng cách từ Q đến đường thẳng đó bằng 3.

- ***Đáp số.*** $x = 3$, $7x + 24y - 134 = 0$.

4. Cho tam giác ABC có diện tích bằng $\frac{3}{2}$, hai đỉnh $A(3; -3)$, $B(3; -2)$ và trọng tâm G của tam giác nằm trên đường thẳng $3x - y - 8 = 0$. Tìm toạ độ đỉnh C.

5. Cho ba đường thẳng d_1: $3x + 4y - 6 = 0$; d_2: $4x + 3y - 1 = 0$; d_3: $y = 0$. Gọi A là giao điểm của d_1 và d_2, $\{B\} = d_2 \cap d_3$;$\{C\} = d_1 \cap d_3$

a) Viết phương trình phân giác trong của góc A và tính diện tích tam giác ABC.

b) Tìm tâm và bán kính đường tròn nội tiếp ΔABC.

6. Viết phương trình đường thẳng đi qua điểm $P(2; 1)$ sao cho đường thẳng đó cùng với hai đường thẳng d_1: $2x - y + 5 = 0$ và d_2: $3x + 6y - 1 = 0$ tạo thành một tam giác cân có đỉnh là giao điểm của d_1 và d_2.

Đáp số. $3x + y - 5 = 0$; $x - 3y - 5 = 0$.

§4. ĐƯỜNG TRÒN

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Phương trình đường tròn

Phương trình đường tròn tâm $I(x_0; y_0)$ bán kính R là: $(x - x_0)^2+(y - y_0)^2 = R^2$

2. Nhận dạng phương trình đường tròn

Phương trình $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 > c$ là phương trình của đường tròn tâm $I(-a;-b)$ bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$

3. Phương trình tiếp tuyến của đường tròn

Đường thẳng tiếp xúc với đường tròn khi và chỉ khi khoảng cách từ tâm đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính của đường tròn.

Viết phương trình tiếp tuyến với đường tròn tâm I tại điểm M thuộc đường tròn, ta viết phương trình đường thẳng qua M và có vectơ pháp tuyến $\overrightarrow{IM}$.

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

21. *Cho phương trình* $x^2 + y^2 + px + (p - 1)y = 0$ *(1)*

Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?

a) (1) là phương trình của một đường tròn.

b) (1) là phương trình của một đường tròn đi qua gốc tọa độ.

c) (1) là phương trình của một đường tròn có tâm $J(p; p - 1)$

d) (1) là phương trình đường tròn có tâm $J\left(-\frac{p}{2}; -\frac{p-1}{2}\right)$ *và bán kính*

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2p^2 - 2p + 1}$$

● ***Trả lời.*** Phương trình đường tròn có dạng: $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$ với điều kiện $a^2 + b^2 > c$

Ta có : $2a = p,\ 2b = p - 1,\ c = 0 \Rightarrow a = \frac{p}{2}; b = \frac{p-1}{2}$

$$a^2 + b^2 = \frac{1}{4}(2p^2 - 2p + 1) > 0$$

Các mệnh đề đúng là : a), b), d)

Mệnh đề sai là : c)

22. *Viết phương trình đường tròn* $(\mathcal{C})$ *trong mỗi trường hợp sau :*

a) $(\mathcal{C})$ *có tâm* $I(1; 3)$ *và đi qua điểm* $A(3; 1)$

b) $(\mathcal{C})$ *có tâm* $I(-2; 0)$ *và tiếp xúc với đường thẳng* $\Delta: 2x + y - 1 = 0$

● ***Giải***

a) Bán kính đường tròn $(\mathcal{C})$ là $IA = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = 2\sqrt{2}$

Phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ là : $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 8$

b) Bán kính của đường tròn $(\mathcal{C})$ là :

$$R = d(I; \Delta) = \frac{|2(-2) + 0 - 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Phương trình đường tròn $(\mathcal{C})$ là: $(x + 2)^2 + y^2 = 5$

23. *Tìm tâm và bán kính của đường tròn cho bởi mỗi phương trình sau:*

a) $x^2 + y^2 + 2x + 2y - 2 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 4x - 6y + 2 = 0$

c) $2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$

● ***Giải***

a) Ta có : $a = 1,\ b = 1,\ c = 2$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{1^2 + 1^2 + 2} = 2$$

Đường tròn đã cho có tâm $I(-1; -1)$ bán kính $R = 2$

b) Ta có : $a = -2$, $b = -3$, $c = 2$

$$R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = \sqrt{2^2 + 3^2 - 2} = \sqrt{11}$$

Đường tròn đã cho có tâm $I(2; 3)$ bán kính $R = \sqrt{11}$

c) $$2x^2 + 2y^2 - 5x - 4y + 1 + m^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - \frac{5}{2}x - 2y + \frac{1 + m^2}{2} = 0$$

Ta có : $a = -\frac{5}{4}$, $b = -1$, $c = \frac{1 + m^2}{2}$

Điều kiện : $a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow \frac{25}{16} + 1 - \frac{1 + m^2}{2} > 0$

$$\frac{33 - 8m^2}{16} > 0 \Leftrightarrow m^2 < \frac{33}{8} \Leftrightarrow |m| < \sqrt{\frac{33}{8}}$$

Với điều kiện $|m| < \sqrt{\frac{33}{8}}$ thì (ε) là đường tròn có tâm $I\left(\frac{5}{4}; 1\right)$ bán kính $R = \frac{1}{4}\sqrt{33 - 8m^2}$

24. *Viết phương trình đường tròn đi qua ba điểm M(1; – 2), N(1; 2), P(5; 2)*

- ***Giải.*** Phương trình đường tròn có dạng : $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. Do M, N, P thuộc đường tròn nên ta có hệ phương trình với ba ẩn số a, b, c.

$$\begin{cases} 5 + 2a - 4b + c = 0 \\ 5 + 2a + 4b + c = 0 \\ 29 + 10a + 4b + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = 0 \\ c = 1 \end{cases}$$

Vậy phương trình cần tìm là : $x^2 + y^2 - 6x + 1 = 0$ hay $(x - 3)^2 + y^2 = 8$

25. *a) Viết phương trình đường tròn tiếp xúc với hai trục toạ độ và đi qua điểm (2; 1)*

b) Viết phương trình đường tròn đi qua hai điểm (1; 1), (1; 4) và tiếp xúc với trục Ox

- ***Giải***

a) Vì điểm M(2; 1) nằm trong góc phần tư thứ nhất nên đường tròn cần tìm (C) cũng ở trong góc phần tư thứ nhất.

(C) tiếp với Ox, Oy nên (C) có tâm I(a; a) và bán kính $R = a (a > 0)$. Do đó (C) có phương trình là : $(x - a)^2 + (y - a)^2 = a^2$

Vì $M(2; 1) \in (\mathcal{E})$ nên $(2 - a)^2 + (1 - a)^2 = a^2 \Leftrightarrow a^2 - 6a + 5 = 0$ (C) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1 \\ a = 5 \end{array}\right.$

Với a = 1 ta có (C) : $(x-1)^2+(y-1)^2=1$

Với a = 5 ta có (C) : $(x-5)^2+(y-5)^2=25$

b) Phương trình đường thẳng Ox : $y = 0$

Giả sử: I(a; b) là tâm của đường tròn cần tìm.

Ta có : $R = d(I;Ox) = |b|$

Phương trình đường tròn có dạng

$$(C) : (x-a)^2+(y-b)^2=b^2$$

Vì (1; 1) ∈ (C) và (1; 4) ∈ (C) nên ta có hệ :

$$(1-a)^2+(1-b)^2=b^2 \qquad (1)$$

$$(1-a)^2+(4-b)^2=b^2 \qquad (2)$$

Từ (1) và (2) suy ra : $(1-b)^2=(4-b)^2 \Leftrightarrow b=\frac{5}{2}$

Thay $b=\frac{5}{2}$ vào (1) ta được a = 3; a = –1.

Vậy phương trình đường tròn cần tìm là :

$$(x-3)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4};\ (x+1)^2+\left(y-\frac{5}{2}\right)^2=\frac{25}{4}$$

26*. Tìm tọa độ các giao điểm của đường thẳng* $\Delta:\begin{cases}x=1+2t\\y=-2+t\end{cases}$ *và đường tròn* $(\mathcal{C})$ $(x-1)^2+(y-2)^2=16$

● ***Giải***. Thay $x = 1 + 2t$, $y = -2 + t$ vào phương trình đường tròn ta được :

$$(2t)^2+(t-4)^2=16 \Leftrightarrow 5t^2-8t=0 \Leftrightarrow t=0;\ t=\frac{8}{5}$$

Với t = 0 ta có x = 1; y = –2 và có giao điểm A(1; –2)

Với $t=\frac{8}{5}$ ta có: $x=\frac{21}{5}$; $y=-\frac{2}{5}$ và có giao điểm $B\left(\frac{21}{5};\frac{-2}{5}\right)$

27*. Viết phương trình tiếp tuyến của đường tròn* $x^2+y^2=4$ *trong mỗ trường hợp sau:*

a)Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x-y+17=0$

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x+2y-5=0$

c) Tiếp tuyến đi qua điểm (2; –2)

● ***Giải.*** Đường tròn (C) : $x^2+y^2=4$ có tâm O(0; 0) bán kính R = 2.

a) Tiếp tuyến song song với đường thẳng $3x-y+17=0$ có dạng $\Delta : 3x-y+c=0$

Ta có: $d(O;\Delta) = R \Leftrightarrow \dfrac{|c|}{\sqrt{3^2+1^2}} = 2 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{10}$

Vậy các tiếp tuyến cần tìm là: $3x - y - 2\sqrt{10} = 0$; $3x - y + 2\sqrt{10} = 0$

b) Tiếp tuyến vuông góc với đường thẳng $x + 2y - 5 = 0$ có dạng :
d: $2x - y + c = 0$

Ta có: $d(O, d) = R \Leftrightarrow \dfrac{|c|}{\sqrt{2^2+1^2}} = 2 \Leftrightarrow c = \pm 2\sqrt{5}$

Vậy các tiếp tuyến cần tìm là :

$$2x - y - 2\sqrt{5} = 0 \quad ; \; 2x - y + 2\sqrt{5} = 0$$

28. *Xét vị trí tương đối của đường thẳng* Δ *và đường tròn* $(\mathcal{C})$ *sau đây*

$$\Delta : 3x + y + m = 0; \; (\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 4x + 2y + 1 = 0$$

- ***Giải.*** $(\mathcal{C})$ có tâm $I(2; -1)$ và bán kính $R = \sqrt{2^2 + 1^2 - 1} = 2$

Khoảng cách từ I đến Δ :

$$d(I, \Delta) = \frac{|3\cdot 2 - 1 + m|}{\sqrt{3^2+1^2}} = \frac{|5+m|}{\sqrt{10}}$$

- $\dfrac{|5+m|}{\sqrt{10}} > 2 \Leftrightarrow |m+5| > 20\sqrt{10} \Leftrightarrow m < -5 - 2\sqrt{10}$ hoặc $m > -5 + 2\sqrt{10}$

thì Δ và $(\mathcal{C})$ cắt nhau.

- $\dfrac{|5+m|}{\sqrt{10}} = 2 \Leftrightarrow |m+5| = 20\sqrt{10} \Leftrightarrow m = -5 \pm 2\sqrt{10}$

thì Δ và $(\mathcal{C})$ tiếp xúc.

- $\dfrac{|5+m|}{\sqrt{10}} < 2 \Leftrightarrow |m+5| < 2\sqrt{10} \Leftrightarrow -5 - 2\sqrt{10} < m < -5 + 2\sqrt{10}$

thì Δ và $(\mathcal{C})$ không cắt nhau.

29. *Tìm toạ độ các giao điểm của hai đường tròn sau đây:*

$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 + 2x + 2y - 1 = 0 \; (1)$

$(\mathcal{C}') : x^2 + y^2 - 2x + 2y - 7 = 0 \; (2)$

- ***Giải.*** Lấy (1) trừ (2) ta được $4x + 6 = 0 \Leftrightarrow x = -\dfrac{3}{2}$

Thay $x = -\dfrac{3}{2}$ vào (1) ta được :

$$\frac{9}{4} + y^2 - 3 + 2y - 1 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 2y - \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow y = -1 \pm \frac{\sqrt{11}}{4}$$

Toạ độ hai giao điểm của $(\mathcal{C})$ và $(\mathcal{C}')$:

$$\left(-\frac{3}{2};-1-\frac{\sqrt{11}}{2}\right) \text{ và } \left(-\frac{3}{2};-1+\frac{\sqrt{11}}{2}\right)$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình đường tròn qua điểm A(1; –2) và các giao điểm của đường thẳng: $x - 7y + 10 = 0$ với đường tròn $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$.

2. Viết phương trình các tiếp tuyến chung của hai đường tròn:

$(\mathcal{C}) : x^2 + y^2 - 10x + 24y - 56 = 0$

$(\mathcal{C}') : x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$

3. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 - 1 = 0$

và (C_m) : $x^2 + y^2 - 2(m + 1)x + 4my - 5 = 0$

a) Xác định m để (C_m) là đường tròn.

b) Chứng minh rằng có hai đường tròn (C_m) tiếp xúc với (C) ứng với hai giá trị khác nhau của m. Viết phương trình tiếp tuyến chung của hai đường đó.

4. Cho $(C_m) : x^2 + y^2 + (2-m)x + 2my - 1 = 0$

a) Xác định m để (C_m) là đường tròn.

b) Cho m = –2 và A(0; –1). Viết phương trình các tiếp tuyến của đường tròn (C_{-2}) kẻ từ A.

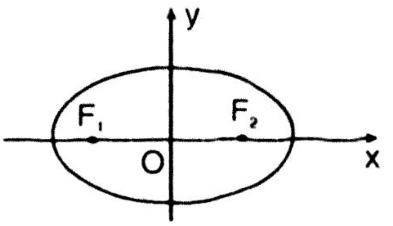
§5. ĐƯỜNG ELIP

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa đường elip

Cho hai điểm cố định F_1 và F_2. Với $F_1F_2 = 2c$ (c > 0). Đường elip (còn gọi là elip) là tập hợp các điểm M sao cho $MF_1 + MF_2 = 2a$ trong đó a là một số cho trước lớn hơn c. Hai điểm F_1 và F_2 gọi là các tiêu điểm của elip, khoảng cách 2c được gọi là tiêu cự của elip.

2. Phương trình chính tắc của elip



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > b > 0)$$

trong đó $b^2 = a^2 - c^2$; $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

Bán kính qua tiêu của điểm M(x; y) thuộc elip.

$$r_1 = MF_1 = a + \frac{cx}{a} \;;\; r_2 = MF_2 = a - \frac{cx}{a}$$

3. **Hình dạng của elip**

a) Tính đối xứng của elip

Elip có phương trình $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

nhận các trục toạ độ làm các trục đối xứng và gốc toạ độ làm tâm đối xứng.

b) Hình chữ nhật cơ sở.

(E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ có bốn đỉnh $A_1(-a; 0)$, $A_2(a; 0)$, $B_1(0; -b)$, $B_2(0; b)$

A_1A_2 gọi là trục lớn có độ dài 2a; B_1B_2 gọi là trục bé có độ dài 2b.

Hình chữ nhật cơ sở của elip là hình chữ nhật được tạo bởi bốn đường thẳng có phương trình là $x = \pm a \,;\, y = \pm b$

c) Tâm sai của elip.

Tỉ số giữa tiêu cự và độ dài trục lớn của elip gọi là tâm sai của elip và kí hiệu là e, tức $e = \frac{c}{a}$ rõ ràng $0 < e < 1$.

E. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

30. Cho (E) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$*. Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

a) Tiêu cự của (E) là 2c, trong đó $c^2 = a^2 - b^2$

b (E) có độ dài trục lớn bằng 2a, độ dài trục nhỏ bằng 2b.

c) (E) có tâm sai $e = -\frac{c}{a}$

d) Tọa độ các tiêu điểm(E) là $F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

e) Điểm (b; 0) là một đỉnh của (E)

- ***Trả lời.*** Các mệnh đề đúng là : a) ; b) ; d)

Các mệnh đề sai là : c); e)

31. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh, độ dài trục lớn, độ dài trục bé của mỗi elip có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$ *b)* $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ *c)* $x^2 + 4y^2 = 4$

- ***Giải***

a) Ta có: $a = 5$, $b = 2$; $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{21}$

Tọa độ các tiêu điểm : $F_1(-\sqrt{21}\,;\,0)$, $F_2(\sqrt{21}\,;\,0)$

Tọa độ các đỉnh : $A_1(-5;\,0)$, $A_2(5;\,0)$, $B_1(0;\,-2)$, $B_2(0;\,2)$

Độ dài trục lớn $2a = 10$, độ dài trục bé $2b = 4$

b) Ta có: $a = 3,\ b = 2,\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5}$

Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{5}\,;\,0)$, $F_2(\sqrt{5}\,;\,0)$

Tọa độ các đỉnh: $A_1(-3;\,0)$, $A_2(3;\,0)$, $B_1(0;\,-2)$, $B_2(0;\,2)$

Độ dài trục lớn $2a = 6$, độ dài trục bé $2b = 4$

c) Ta có: $x^2 + 4y^2 = 4 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$

$$a = 2,\ b = 1,\ c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}$$

Tọa độ các tiêu điểm $F_1(-\sqrt{3}\,;\,0)$, $F_2(\sqrt{3}\,;\,0)$

Tọa độ các đỉnh : $A_1(-2;\,0)$, $A_2(2;\,0)$, $B_1(0;\,-1)$, $B_2(0;\,1)$

Độ dài trục lớn $2a = 4$, độ dài trục bé $2b = 2$

***32.** Viết phương trình chính tắc của đường elip (E) trong mỗi trường hợp sau:*

a) (E) có độ dài trục lớn bằng 8 và tâm sai $e = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$

b) (E) có độ dài trục bé bằng 8 và tiêu cự bằng 4.

c) (E) có một tiêu điểm là $F(\sqrt{3}\,;\,0)$ *và đi qua điểm* $M\left(1;\,\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$

● ***Giải***

a) Ta có : $2a = 8 \Rightarrow a = 4$

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$$

$$b^2 = a^2 - c^2 = 16 - 12 = 4$$

Vậy (E): $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

b) Ta có: $2b = 8 \Rightarrow b = 4$

$$2c = 4 \Rightarrow c = 2$$

$$a^2 = b^2 + c^2 = 16 + 4 = 20$$

Vậy (E): $\dfrac{x^2}{20} + \dfrac{y^2}{16} = 1$

c) Ta có: $c = \sqrt{3} \Rightarrow a^2 - b^2 = 3$

Giả sử: (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$M\left(1;\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) \in (E)$ nên $\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1$

Ta có hệ : $\begin{cases} a^2-b^2=3 \\ \dfrac{1}{a^2}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2=b^2+3 \\ \dfrac{1}{b^2+3}+\dfrac{3}{4b^2}=1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a^2=b^2+3 \\ 4b^2+3b^2+9=4b^2+12b^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2=b^2+3 \\ 4b^4+5b^2-9=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2=4 \\ b^2=1 \end{cases} \text{ (loại } b^2=-\frac{9}{4}\text{)}$$

Vậy (E) : $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{1}=1$

3.3. *Cho elip (E) :* $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{1}=1$

a) Tính độ dài dây cung của (E) đi qua một tiêu điểm và vuông góc với trục tiêu (đoạn thẳng nối hai điểm của elip gọi là dây cung của elip, trục chứa các tiêu điểm gọi là trục tiêu của elip)

b) Tìm trên (E) điểm M sao cho $MF_1 = 2MF_2$, trong đó F_1, F_2 lần lượt là các tiêu điểm của (E) nằm bên trái và bên phải trục tung.

- ***Giải***

a) Ta có : $a = 3$, $b = 1$, $c = \sqrt{a^2-b^2} = 2\sqrt{2}$

$F_1(-2\sqrt{2}\,;\,0)$, $F_2(2\sqrt{2}\,;\,0)$

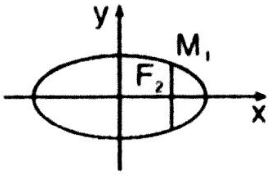
Gọi M là điểm trên (E) có hoành độ $x = 2\sqrt{2}$

Thay $x = 2\sqrt{2}$ vào phương trình (E) ta được:

$$\frac{8}{9}+\frac{y^2}{1}=1 \quad \Leftrightarrow y^2=\frac{1}{9} \Leftrightarrow y=\pm\frac{1}{3}$$

Vậy $M_1(2\sqrt{2}\,;\,\frac{1}{3})$, $M_2(2\sqrt{2}\,;\,-\frac{1}{3})$ và độ dài dây cung cần tìm là $M_1M_2 = \dfrac{2}{3}$

Ta có: $MF_1 = a + \dfrac{c}{a}x = 3 + \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$



$MF_2 = a - \dfrac{c}{a}x = 3 - \dfrac{2\sqrt{2}}{3}x$

$$MF_1 = 2MF_2 \Leftrightarrow 3+\frac{2\sqrt{2}}{3}x = 6-\frac{4\sqrt{2}}{3}x \Leftrightarrow 2\sqrt{2}x = 3 \Leftrightarrow x = \frac{3\sqrt{2}}{4}$$

Thay $x = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$ vào phương trình elip ta được:

$$\frac{2}{16} + y^2 = 1 \qquad \Leftrightarrow y^2 = \frac{7}{8} \Leftrightarrow y = \pm\frac{\sqrt{14}}{4}$$

Vậy $\quad M_1\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}; \dfrac{\sqrt{14}}{4}\right) \qquad M_2\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{4}; \dfrac{-\sqrt{14}}{4}\right)$

34. *Vệ tinh nhân tạo đầu tiên được Liên Xô (cũ) phóng từ Trái Đất năm 1957. Quỹ đạo của vệ tinh đó là một đường elip nhận tâm Trái Đất là một tiêu điểm. Người ta đo được vệ tinh cách bề mặt Trái Đất gần nhất là 583 dặm và xa nhất là 1342 dặm (1 dặm ≈ 1,609km). Tìm tâm sai của quỹ đạo đó biết bán kính Trái Đất xấp xỉ 4000 dặm.*

● ***Giải.*** Giả sử tâm Trái Đất là : $F_1(-c; 0)$

MF_1 có giá trị nhỏ nhất là $a - c$ và có giá trị lớn nhất là $a + c$. Do đó

$$a + c = 1342 + 4000 = 5342$$

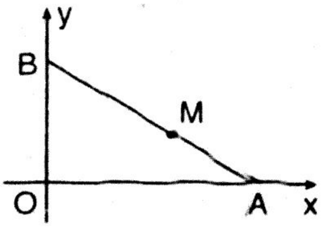
$$a - c = 583 + 4000 = 4583$$

Từ đó suy ra $2a = 9925$; $2c = 759$.

Do đó : $\quad e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{759}{9925} \approx 0,07647$

35. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho điểm A chạy trên trục Ox, điểm B chạy trên trục Oy nhưng độ dài đoạn AB bằng a không đổi. Tìm tập hợp các điểm M thuộc đoạn AB sao cho MB = 2MA.*

●***Giải.*** Giả sử : $A(x_0; 0)$, $B(0; y_0)$



$$AB = a \Leftrightarrow \sqrt{x_0^2 + y_0^2} = a \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 = a^2$$

M thuộc đoạn AB và MB = 2MA

nên $\overrightarrow{AM} = \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

Giả sử : $M(x; y)$, khi đó : $\overrightarrow{AM} = (x - x_0; y)$, $\overrightarrow{AB} = (-x_0; y_0)$; $3\,\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{AB}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(x - x_0) = -x_0 \\ 3y = y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_0 = \dfrac{3}{2}x \\ y_0 = 3y \end{cases}$$

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{9}{4}x^2 + 9y^2 = a^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2} = 1$$

Vậy tập hợp điểm M là elip có phương trình : $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{2a}{3}\right)^2} + \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{a}{3}\right)^2} = 1$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình chính tắc của elip (E) trong mỗi trường hợp sau:

   a) (E) có độ dài trục lớn bằng 6, tiêu cự bằng 4

   b) (E) có một tiêu điểm F(−2; 0) và độ dài trục lớn bằng 10.

   c) (E) đi qua M (0; 1) và N$\left(1; \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

2. Xác định toạ độ các đỉnh, tiêu điểm và tâm sai của các elip sau:

   a) $16x^2 + 25y^2 = 400$

   b) $x^2 + 9y^2 = 36$

3. Cho A(0; sint), B(3cost, 0). Tìm tập hợp các điểm M(x; y) sao cho $2\vec{AM} + 5\vec{MB} = \vec{0}$

4. Cho hai elip có phương trình: $\frac{x^2}{16} + y^2 = 1$ và $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

   Chứng minh rằng: hai elip này cắt nhau tại 4 điểm nằm trên một đường tròn. Viết phương trình đường tròn đi qua các giao điểm của hai elip.

   Đáp số. $x^2 + y^2 = \frac{90}{11}$

§6. ĐƯỜNG HYPEBOL

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

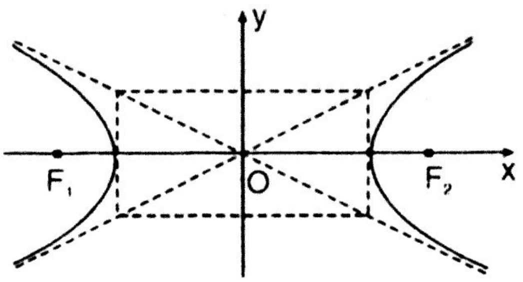
1. Định nghĩa đường hypebol

Cho hai điểm cố định F_1, F_2 có khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ $(c > 0)$. Đường hypebol là tập hợp các điểm M sao cho $|MF_1 - MF_2| = 2a$, trong đó a là số dương cho trước nhỏ hơn c $(0 < a < c)$.

Hai điểm F_1, F_2 gọi là tiêu điểm của hypebol.

Khoảng cách $F_1F_2 = 2c$ gọi là tiêu cự của hypebol.

2. Phương trình chính tắc của hypebol



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (a > 0, b > 0)$$

trong đó $b^2 = c^2 - a^2$ $(b > 0)$

$F_1(-c; 0)$, $F_2(c; 0)$

Bán kính qua tiêu $r_1 = \left|a + \frac{c}{a}x\right|$; $r_2 = \left|a - \frac{c}{a}x\right|$

3. Hình dạng của hypebol

a) Gốc toạ độ O là tâm đối xứng của hypebol. Ox, Oy là hai trục đối xứng của hypebol.

b) Hypebol cắt trục Ox tại hai điểm và không cắt trục Oy.

- Trục Ox gọi là trục thực, trục Oy gọi là trục ảo.
- Hai giao điểm của hypebol với trục Ox gọi là hai đỉnh của hypebol. Độ dài trục thực là 2a, độ dài trục ảo là 2b.
- Tâm sai của hypebol $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
- Hình chữ nhật tạo bởi các đường thẳng $x = \pm a, y = \pm b$ gọi là hình chữ nhật cơ sở của hypebol.
- Phương trình của hai đường tiệm cận của hypebol là : $y = \pm\frac{b}{a}x$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

36. *Cho hypebol (H) có phương trình chính tắc* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$. *Hỏi trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

a) Tiêu cự của (H) là 2c, trong đó $c^2 = a^2 + b^2$

b) (H) có độ dài trục thực bằng 2a, độ dài trục ảo bằng 2b

c) Phương trình hai đường tiệm cận của (H) là $y = \pm\frac{a}{b}x$

d) Tâm sai của (H) là $e = \frac{c}{a} > 1$

- ***Trả lời.*** Các mệnh đề đúng là: a), b), d)

  Mệnh đề sai là c)

37. *Tìm tọa độ các tiêu điểm, các đỉnh; độ dài trục thực, trục ảo và phương tình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau:*

a) $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1$ *b)* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ *c)* $x^2 - 9y^2 = 9$

- ***Giải***

a) Ta có : $a = 3, b = 2, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{13}$

Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{13}; 0), F_2(\sqrt{13}; 0)$. Các đỉnh $A_1(-3; 0), A_2(3; 0)$

Độ dài trục thực $2a = 6$, độ dài trục ảo $2b = 4$

Phương trình các đường tiệm cận của hypebol : $y = \pm\frac{2}{3}x$

b) Ta có: $a = 3, b = 4, c = \sqrt{a^2 + b^2} = 5$

Tiêu điểm $F_1(-5; 0)$, $F_2(5; 0)$

Các đỉnh $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$

Độ dài trục thực $2a = 6$, độ dài trục ảo $2b = 8$

Phương trình các đường tiệm cận: $y = \pm\dfrac{4}{3}x$

c) Ta có : $x^2 - 9y^2 = 9 \Leftrightarrow \dfrac{x^2}{9} - y^2 = 1$

$$a = 3,\ b = 1,\ c = \sqrt{10}$$

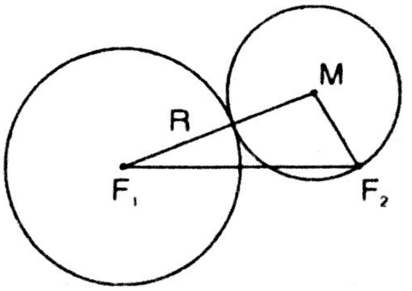
Tiêu điểm $F_1(-\sqrt{10}\ ; 0)$, $F_2(\sqrt{10}\ ; 0)$. Các đỉnh $A_1(-3; 0)$, $A_2(3; 0)$

Độ dài trục thực $2a = 6$, độ dài trục ảo $2b = 2$

Phương trình các dường tiệm cận của hypebol : $y = \pm\dfrac{1}{3}x$.

38. *Cho đường tròn $(\mathscr{E})$ tâm F_1, bán kính R và một điểm F_2 ở ngoài $(\mathscr{E})$. Chứng minh rằng tập hợp tâm các đường tròn đi qua F_2, tiếp xúc với $(\mathscr{E})$ là một đường hypebol. Viết phương trình chính tắc của hypebol đó.*

● ***Giải***



Gọi M là tâm đường tròn đi qua F_2 và tiếp xúc $(\mathscr{E})$ Ta có : $|MF_1 - MF_2| = R = 2a$

Vậy tập hợp các điểm M là dường hypebol (H) có $a = \dfrac{R}{2}$, $c = \dfrac{F_1F_2}{2}$

$$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = \frac{F_1F_2^2 - R^2}{4}$$

Phương trình chính tắc của (H) là : $\dfrac{x^2}{\left(\dfrac{R}{2}\right)^2} - \dfrac{y^2}{\left(\dfrac{\sqrt{F_1F_2^{\ 2} - R^2}}{2}\right)^2} = 1$.

39. *Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) trong mỗi trường hợp sau:*

a) (H) có một tiêu điểm là (5; 0) và độ dài trục thực bằng 8.

b) (H) có tiêu cự bằng $2\sqrt{3}$, một đường tiệm cận là $y = \dfrac{2}{3}x$

c) (H) có tâm sai $e = \sqrt{5}$ và đi qua điểm $\left(\sqrt{10}; 6\right)$

● ***Giải***

a) Ta có : $c = 5$, $a = 4 \Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 9 \Rightarrow b = 3$. Vậy (H): $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

b) Ta có : $c = \sqrt{3}$, $\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \Rightarrow b = \frac{2a}{3}$

$$c^2 = a^2 + b^2 = 3 \Rightarrow a^2 + \frac{4a^2}{9} = 3 \Rightarrow a^2 = \frac{27}{13};\ b^2 = 3 - \frac{27}{13} = \frac{12}{13}$$

Vậy (H) : $\dfrac{x^2}{\frac{27}{13}} - \dfrac{y^2}{\frac{12}{13}} = 1$

c) Ta có : $e = \frac{c}{a} = \sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 5a^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = 5a^2 \Rightarrow b^2 = 4a^2$ (1)

Giả sử : (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Vì $M\left(\sqrt{10};6\right) \in (H)$ nên : $\frac{10}{a^2} - \frac{36}{b^2} = 1 \Leftrightarrow 10b^2 - 36a^2 = a^2b^2$ (2)

Thay (1) vào (2) ta được : $40a^2 - 36a^2 = a^2(4a^2) \Rightarrow a^2 = 1$; $b^2 = 4$

Vậy (H) : $\frac{x^2}{1} - \frac{y^2}{4} = 1$

40. *Chứng minh rằng tích các khoảng cách từ một điểm bất kì thuộc hypebol đến hai đường tiệm cận của nó là một số không đổi.*

● ***Giải.*** Giả sử (H) có phương trình chính tắc $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, phương trình tiệm cận của (H) là: d_1: $y = \frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx - ay = 0$

d_2: $y = -\frac{b}{a}x \Leftrightarrow bx + ay = 0$

Gọi $M_0(x_0, y_0) \in (H)$ ta có : $\frac{{x_0}^2}{a^2} - \frac{{y_0}^2}{b^2} = 1 \Leftrightarrow b^2x_0^2 - a^2y_0^2 = a^2b^2$

Ta có: $d(M_0,d_1).\ d(M_0,d_2) = \frac{|bx_0 - ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} \cdot \frac{|bx_0 + ay_0|}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{|b^2x_0^2 - a^2y_0^2|}{a^2+b^2}$

$= \frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$ (không đổi)

41. *Trong mặt phẳng toạ độ cho hai điểm $F_1(-\sqrt{2};-\sqrt{2})$, $F_2(\sqrt{2};\sqrt{2})$ Chứng minh rằng với mọi điểm $M(x;y)$ nằm trên đồ thị hàm số $y = \frac{1}{x}$ ta đều có $MF_1^2 = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2$; $MF_2^2 = \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$*

Từ đó suy ra $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$

- ***Giải.*** Giả sử: $M(x, y) \in (H)$: $y = \frac{1}{x}$ ta có:

$$MF_1^2 = \left(x + \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2 = x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 + \frac{1}{x^2} + 2\sqrt{2}\frac{1}{x} + 2$$

$$= \left(x^2 + \frac{1}{x^2} + 2\right) + 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2\left(x + \frac{1}{x}\right).\sqrt{2} + \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}\right)^2$$

$$MF_2^2 = \left(x - \sqrt{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2 = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 - 2\sqrt{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + 2$$

$$= \left(x + \frac{1}{x} - \sqrt{2}\right)^2$$

Từ đó suy ra

- Với $x > 0$ thì $x + \frac{1}{x} \geq 2$ (BĐT Côsi)

  Khi đó $MF_1 = x + \frac{1}{x} + \sqrt{2}$; $MF_2 = x + \frac{1}{x} - \sqrt{2} \Rightarrow MF_1 - MF_2 = 2\sqrt{2}$

- Với $x < 0$ thì $\left|x + \frac{1}{x}\right| = |x| + \frac{1}{|x|} \geq 2 \Rightarrow x + \frac{1}{x} \leq -2$, khi đó:

  $$MF_1 = -x - \frac{1}{x} - \sqrt{2};\ MF_2 = -x - \frac{1}{x} + \sqrt{2} \quad \Rightarrow MF_1 - MF_2 = 2\sqrt{2}$$

  Vậy $|MF_1 - MF_2| = 2\sqrt{2}$.

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình chính tắc của hypebol biết:

a) Độ dài trục thực 8 và tiêu cự bằng10.

b) Tiêu cự bằng $2\sqrt{13}$, một tiệm cận là $y = -\frac{2}{3}x$

2. Tìm toạ độ các tiêu điểm, các đỉnh; độ dài trục thực, trục ảo và phương trình các đường tiệm cận của mỗi hypebol có phương trình sau:

a) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{1} = 1$ b) $9x^2 - y^2 = 9$ c) $9x^2 - 4y^2 = 36$

3. Cho hypebol (H) : $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$.Gọi d là đường thẳng qua O có hệ số góc k, d' là đường thẳng qua O và vuông góc với d.

a) Tìm điều kiện của k để d và d' đều cắt (H).

b) Tính theo k diện tích hình thoi với 4 đỉnh là 4 giao điểm của d, d' với (H).

c) Xác định k để hình thoi ấy có diện tích nhỏ nhất.

● ***Hướng dẫn***

a) d: $y = kx$, d' : $y = -\frac{1}{k}x$ Điều kiện $\frac{2}{3} < |k| < \frac{3}{2}$

b) $S = \frac{72(1+k)^2}{\sqrt{9-4k^2}\cdot\sqrt{9k^2-4}}$ c) Áp dụng BĐT Côsi $|k| = 1$.

4. Cho hypebol (H). Chứng minh rằng hình bình hành xác định bởi hai đường tiệm cận và hai đường thẳng đi qua một điểm trên (H) và song song với hai tiệm cận có diện tích là một hằng số.

Đáp số. $\frac{1}{2}ab$.

§7. ĐƯỜNG PARABOL

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Định nghĩa đường parabol

Cho một điểm F cố định và một đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M cách đều F và Δ gọi là đường parabol. Điểm F gọi là tiêu điểm của parabol. Đường thẳng Δ được gọi là đường chuẩn của parabol. Khoảng cách từ F đến Δ được gọi là tham số tiêu của parabol.

2. Phương trình chính tắc của parabol

Cho (P) có tiêu điểm F và đường chuẩn Δ

Phương trình chính tắc của parabol (P): $y^2 = 2px$ $(P > 0)$ trong đó $F\left(\frac{p}{2};0\right)$ và $\Delta: x = -\frac{p}{2}$

B. PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

42. *Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng ?*

a) $y^2 = -2x$ *là phương trình chính tắc của parabol.*

b) $y = x^2$ *là phương trình chính tắc của parabol.*

c) Parabol (P) : $y^2 = 2x$ *có tiêu điểm F(0,5; 0) và có đường chuẩn*

$\Delta: x + 0{,}5 = 0$

d) Parabol $y^2 = 2px$ $(p > 0)$ *có tiêu điểm F(P; 0) và có đường chuẩn*

$\Delta: x + p = 0$

● ***Trả lời.*** Mệnh đề đúng c). Các mệnh đề sai là a), b), d)

43. *Viết phương trình chính tắc của parabol (P) trong mỗi trường hợp sau:*

a) (P) có tiêu điểm F(3; 0)

a) (P) đi qua điểm M(1; –1)

c) (P) có tham số tiêu $p = \frac{1}{3}$

● ***Giải***

a) Ta có: $\frac{p}{2} = 3 \Rightarrow p = 6$

Phương trình chính tắc của (P) là: $y^2 = 12x$

b) Giả sử (P): $y^2 = 2px$ ($p > 0$)

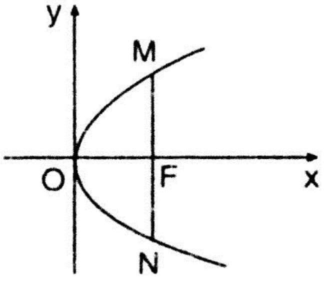
$M(1;-1) \in (P)$ nên $(-1)^2 = 2p \cdot 1 \Rightarrow p = \frac{1}{2}$

Vậy (P) : $y^2 = x$

c) (P) : $y^2 = \frac{2}{3}x$

44. *Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Tìm độ dài dây cung của (P) vuông góc với trục đối xứng tại điểm F của (P) (dây cung của (P) là đoạn thẳng nối hai điểm của (P)).*

●***Giải.*** Ta có : $F\left(\frac{1}{2};0\right)$. Gọi M là điểm thuộc (P) có hoành độ $x = \frac{p}{2}$ thay $x = \frac{p}{2}$ vào phương trình của (P) ta được :

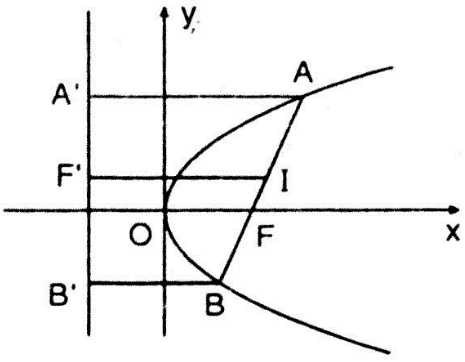


$$y^2 = 2p \cdot \frac{p}{2} = p^2 \Rightarrow y = \pm p$$

Vậy $M\left(\frac{p}{2}, p\right)$ và $N\left(\frac{p}{2}, -p\right) \Rightarrow MN = 2p$

45. *Cho dây cung AB đi qua tiêu điểm của parabol (P). Hãy tính khoảng cách từ trung điểm I của dây AB đến đường chuẩn của (P). Từ đó có nhận xét gì về đường tròn đường kính AB ?*

Giải. Gọi A', B', I' lần lượt là hình chiếu vuông góc của A, B, I lên đường chuẩn Δ.



Theo định nghĩa parabol ta có :

$$AA' = AF \text{ và } BB' = BF$$

$$\Rightarrow \quad AB = AF + FB = AA' + BB' = 2II'$$

$$\Rightarrow \quad II' = d(I, \Delta) = \frac{AB}{2}$$

Từ đó suy ra đường tròn đường kính AB tiếp xúc với đường chuẩn.

***46.** Trong mặt phẳng toạ độ Oxy cho điểm F(1; –2). Tìm hệ giữa x, y để điểm M(x, y) cách đều điểm F và trục hoành.*

- ***Giải.*** Phương trình đường thẳng Ox là $y = 0$.

Ta có : $MF = d(M, Ox) \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+2)^2} = |y|$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 + 4y + 4 = y^2 \Leftrightarrow y = -\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x - \frac{5}{4}$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Cho (P) : $y^2 = 64x$

a) Xác định tiêu điểm, đường chuẩn của (P).

b) Lấy M thuộc (P) và N thuộc đường thẳng $\Delta : 4x + 3y + 46 = 0$. Xác định M, N để MN nhỏ nhất, khi đó chứng minh MN vuông góc với tiếp tuyến tại M của (P).

Đáp số. a) $p = 32$, $F(16, 0)$; $x + 16 = 0$; b) $M(9; -24)$, $N(\frac{37}{5}; -\frac{126}{5})$

2) Cho điểm F(3;0) và đường thẳng d có phương trình $3x - 4y + 16 = 0$.

a) Viết phương trình đường tròn tâm F tiếp xúc với d.

b) Viết phương trình chính tắc của parabol có tiêu điểm F.

Tìm giao điểm của (P) và d.

Đáp số. a) $x^2 + y^2 - 6x - 16 = 0$ b) $y^2 = 12x$

§8. BA ĐƯỜNG CONIC

A. TÓM TẮT GIÁO KHOA

1. Đường chuẩn của elip

Cho (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$

$\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$ là đường chuẩn của elip ứng với $F_1 = (-c; 0)$

$\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$ là đường chuẩn của elip ứng với $F_2 = (c; 0)$

Mọi $M \in (E)$ ta có : $\frac{MF_1}{d(M, \Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M, \Delta_2)} = e \, (e < 1)$

2. Đường chuẩn của hypebol

Cho (H) : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

Các đường thẳng $\Delta_1 : x = -\frac{a}{e}$; $\Delta_2 : x = \frac{a}{e}$ gọi là các đường chuẩn của (H) ứng với $F_1(-c;0), F_2(c;0)$ và ta cũng có: $\frac{MF_1}{d(M;\Delta_1)} = \frac{MF_2}{d(M;\Delta_2)} = e(e > 1)$

3. Định nghĩa đường cônic

Cho điểm F cố định và đường thẳng Δ cố định không đi qua F. Tập hợp các điểm M sao cho tỉ số $\frac{MF}{d(M;\Delta)} = e$ (e là một số dương cho trước)

gọi là đường cônic. Điểm F gọi là tiêu điểm, Δ gọi là đường chuẩn và e gọi là tâm sai của đường cônic

Elip là đường cônic có tâm sai $e < 1$

Parabol là đường cônic có tâm sai $e = 1$

Hypebol là đường cônic có tâm sai $e > 1$

B PHƯƠNG PHÁP GIẢI BÀI TẬP

47. Xác định tiêu điểm và đường chuẩn của các đường cônic sau :

a) $y^2 = 14x$ b) $\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{7} = 1$ c) $\frac{x^2}{14} - \frac{y^2}{1} = 1$

- ***Giải***

a) Ta có : p = 7, tiêu điểm $F(\frac{7}{2};0)$, đường chuẩn $x + \frac{7}{2} = 0$

b) $a = \sqrt{10}, b = \sqrt{7}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{10}}$

Tiêu điểm $F_1\left(-\sqrt{3};0\right)$, đường chuẩn $x = -\frac{10}{\sqrt{3}}$

Tiêu điểm $F_2\left(\sqrt{3};0\right)$, đường chuẩn $x = \frac{10}{\sqrt{3}}$

c) $a = \sqrt{14}, b = 1, c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{15}, e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}$

Tiêu điểm $F_2\left(-\sqrt{15};0\right)$, đường chuẩn $x = -\frac{14}{\sqrt{15}}$

Tiêu điểm $F_2\left(-\sqrt{15};0\right)$, đường chuẩn $x = \frac{14}{\sqrt{15}}$

48. Cho đường thẳng $\Delta : x + y - 1 = 0$ và điểm $F(1; 1)$. Viết phương trình của đường cônic nhận F là tiêu điểm và Δ là đường chuẩn trong mỗi trường hợp sau đây:

a) Tâm sai $e = 1$, *b) Tâm sai* $e = \sqrt{2}$; *c) Tâm sai* $e = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

● ***Giải***

a) Giả sử : $M(x;\ y) \in (\varepsilon)$

$$MF = \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2}, \qquad d(M,\Delta) = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = e = 1 \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 2(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy - 2x - 2y + 3 = 0$$

b) $$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = (x+y-1)^2$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow 2xy - 1 = 0$$

c) $$\frac{MF}{d(M,\Delta)} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \sqrt{(1-x)^2 + (1-y)^2} = \frac{|x+y-1|}{2}$$

$$\Leftrightarrow 4(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + y^2 + 1 + 2xy - 2x - 2y$$

$$\Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 - 6x - 6y - 2xy + 7 = 0$$

C. BÀI TẬP LÀM THÊM

1. Viết phương trình đường chuẩn của các cônic sau :

a) $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{16} = 1$ b) $\dfrac{x^2}{9} - \dfrac{y^2}{4} = 1$ c) $y^2 = 8x$

2. Viết phương trình cônic trong các trường hợp sau :

a) Tiêu điểm $F(2;\ 3)$, đường chuẩn $y = 0$, tâm sai $e = 1$

b) Tiêu điểm $F(0;\ 3)$, đường chuẩn $y = 0$, tâm sai $e = \dfrac{1}{2}$

c) Tiêu điểm $F(0;\ 3)$, đường chuẩn $y = 0$, tâm sai $e = 2$

ÔN TẬP CHƯƠNG III

A. BÀI TẬP ÔN CHƯƠNG III

1. *Xét vị trí tương đối của các đường thẳng* Δ_1 *và* Δ_2 *trong mỗi trường hợp sau :*

a) $\Delta_1 : 3x - 2y + 1 = 0$ *và* $\Delta_2 : 2x + 3y - 5 = 0$

b) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 4 + 2t \\ y = -1 + t \end{cases}$ và $\Delta_2 : \begin{cases} x = 7 - 4t' \\ y = 5 - 2t' \end{cases}$

c) $\Delta_1 : \begin{cases} x = 3 + 4t \\ y = -2 - 5t \end{cases}$ và $\Delta_2 : 5x + 4y - 7 = 0$

- ***Giải***

a) Ta có : $\frac{3}{2} \neq -\frac{2}{3}$ nên Δ_1 và Δ_2 cắt nhau.

b) Phương trình tổng quát của Δ_1 và Δ_2 là:

$$\Delta_1 : x - 2y - 6 = 0 \; ; \; \Delta_2 : x - 2y + 3 = 0.$$

Ta có: $\frac{1}{1} = \frac{-2}{-2} \neq \frac{-6}{3}$ nên $\Delta_1 // \Delta_2$

c) Phương trình tổng quát của Δ_1 là $5x + 4y - 7 = 0$. Do đó $\Delta_1 \equiv \Delta_2$

2. *Cho đường thẳng $\Delta : 3x - 4y + 2 = 0$*

a) Viết phương trình của Δ dưới dạng tham số.

b) Viết phương trình Δ dưới dạng theo đoạn chắn.

c) Tính khoảng cách từ mỗi điểm $M(3; 5)$, $N(-4; 0)$, $P(2; 1)$ đến Δ và xét xem đường thẳng Δ cắt cạnh nào của tam giác MNP.

d) Tính các góc hợp bởi Δ và mỗi trục toạ độ.

- ***Giải***

a) Δ có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;-4)$ nên có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (4;3)$

Δ đi qua điểm $A\left(0;\frac{1}{2}\right)$. Vậy Δ có phương trình tham số là:

$$\begin{cases} x = 4t \\ y = \frac{1}{2} + 3t \end{cases}$$

b) Ta có : $3x - 4y + 2 = 0 \Leftrightarrow 3x - 4y = -2 \Leftrightarrow \frac{x}{-\frac{2}{3}} + \frac{y}{\frac{1}{2}} = 1$

c) $d(M;\Delta) = \frac{|3 \cdot 3 - 4 \cdot 5 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{9}{5}$

$$d(N;\Delta) = \frac{|-12 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2$$

$$d(P;\Delta) = \frac{|6 - 4 + 2|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{4}{5}$$

M và N cùng phía đối với đường thẳng Δ còn P nằm khác phía nên Δ không cắt MN, Δ cắt NP và MP.

d) Đường thẳng Ox có phương trình $y = 0, \alpha$ là góc giữa Δ với Ox thì:

$$\cos\alpha = \frac{|3\cdot 0 - 4\cdot 1|}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{0^2+1^2}} = \frac{4}{5} \qquad \Rightarrow \alpha \approx 36^0,52'$$

Phương trình đường thẳng Oy là $x = 0$, β là góc giữa Δ với Oy ta có :

$$\cos\beta = \frac{|3\cdot 1 - 4\cdot 0|}{\sqrt{3^2+4^2}\cdot\sqrt{1^2+0^2}} = \frac{3}{5} \qquad \Rightarrow \beta \approx 53^0,7'$$

3. *Cho đường thẳng d: $x - y + 2 = 0$ và điểm $A(2; 0)$.*

a) Với điều kiện nào của x và y thì điểm $M(x; y)$ thuộc nửa mặt phẳng có bờ là d và chứa gốc tọa độ O? Chứng minh điểm A nằm trong nửa mặt phẳng đó.

b) Tìm điểm đối xứng với điểm O qua đường thẳng d.

c) Tìm điểm M trên d sao cho chu vi tam giác OMA nhỏ nhất.

- ***Giải***

a) Điểm M và O nằm cùng phía đối với d khi và chỉ khi

$$(x - y + 2).(0 - 0 + 2) > 0 \Leftrightarrow x - y + 2 > 0.$$

Ta có : $x_A - y_A + 2 = 2 - 0 + 2 = 4 > 0$, do đó A nằm trong nửa mặt phẳng có bờ là d và chứa O.

b) Gọi d' là đường thẳng qua O và vuông góc với d thì phương trình tổng quát của d' là: d': $x + y = 0$. Gọi H là hình chiếu của O lên d thì toạ độ H là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Vậy } H(-1; 1)$$

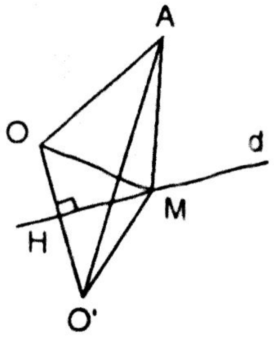
Gọi O' là điểm đối xứng của O qua d thì H là trung điểm của OO' do đó:

$$\begin{cases} x_H = \dfrac{x_O + x_{O'}}{2} \\ y_H = \dfrac{y_O + y_{O'}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_{O'} = 2x_H - x_O = -2 \\ y_{O'} = 2y_H - y_O = 2 \end{cases} \quad \text{Vậy } O'(-2;2)$$

c) OA không đổi nên chu vi tam giác AMO nhỏ nhất khi tổng MO + MA nhỏ nhất.

Ta có: $MO = MO' \Rightarrow MO + MA = MO' + MA \geq AO'$

$\Rightarrow$ MO + MA nhỏ nhất khi A, M, O' thẳng hàng, khi đó M là giao điểm của d với đường thẳng O'A.



Phương trình O'A : $\dfrac{x - x_A}{x_{O'} - x_A} = \dfrac{y - y_A}{y_{O'} - y_A}$

$$\frac{x - 2}{-2 - 2} = \frac{y - 0}{2 - 0} \Leftrightarrow x + 2y - 2 = 0$$

Toạ độ M là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} x - y = -2 \\ x + 2y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\dfrac{2}{3} \\ y = \dfrac{4}{3} \end{cases} \quad \text{Vậy } M\left(-\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right)$$

4. *Cho đường thẳng* $\Delta: ax + by + c = 0$ *và điểm* $I(x_0; y_0)$. *Viết phương trình đường thẳng* Δ' *đối xứng với đường thẳng* Δ *qua I.*

● ***Giải.*** Đường thẳng Δ' đối xứng với đường thẳng Δ qua I thì $\Delta' // \Delta$ do đó phương trình tổng quát của Δ' có dạng: $ax + by + c' = 0$ $(c' \neq c)$

Ta có: $d(I, \Delta) = d(I, \Delta')$

$$\Leftrightarrow \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_0 + by_0 + c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} ax_0 + by_0 + c = ax_0 + by_0 + c' \\ ax_0 + by_0 + c = -ax_0 - by_0 - c' \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} c = c' \text{(loại)} \\ c' = -c - 2(ax_0 + by_0) \end{array}\right.$$

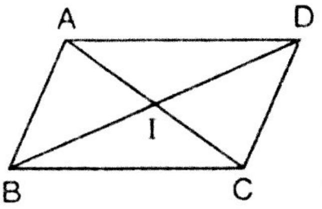
Vậy Δ': $ax + by + c - 2(ax_0 + by_0 + c) = 0$

5. *Một hình bình hành có hai cạnh nằm trên hai đường thẳng* $x + 3y - 6 = 0$ *và* $2x - 5y - 1 = 0$. *Biết hình bình hành có tâm đối xứng là* $I(3; 5)$. *Hãy viết phương trình hai cạnh còn lại của hình bình hành đó.*

● ***Giải.*** Giả sử hình bình hành ABCD có tâm I

AB: $x + 3y - 6 = 0$

AD: $2x - 5y - 1 = 0$



Toạ độ của A là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} x + 3y - 6 = 0 \\ 2x - 5y - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \end{cases} \quad \text{Vậy } A(3; 1)$$

I là trung điểm của AC nên :

$$\begin{cases} x_I = \dfrac{1}{2}(x_A + x_C) \\ y_I = \dfrac{1}{2}(y_A + y_C) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_C = 2x_I - x_A = 3 \\ y_C = 2y_I - y_A = 9 \end{cases} \quad \text{Vậy } C(3; 9)$$

BC là đường thẳng qua C và song song với AD nên BC có phương trình: $2(x - 3) - 5(y - 9) = 0 \Leftrightarrow 2x - 5y + 39 = 0$

CD là đường thẳng qua C và song song với AB nên CD có phương trình: $1(x - 3) + 3(y - 9) = 0 \Leftrightarrow x + 3y - 30 = 0$

Vậy hai cạnh còn lại của hình bình hành là :

$2x - 5y + 39 = 0$ và $x + 3y - 30 = 0$.

6. *Cho phương trình:* $x^2 + y^2 + mx - 2(m + 1)y + 1 = 0$ *(1)*

a) Với giá trị nào của m thì (1) là phương trình đường tròn ?

b) Tìm tập hợp tâm của các đường tròn nói ở câu a).

● ***Giải***

a) Ta có : $2a = m$, $2b = -2(m + 1)$, $c = 1 \Rightarrow a = \frac{m}{2}$, $b = -(m + 1), c = 1$

$$(1) \text{ là đường tròn } \Leftrightarrow a^2 + b^2 - c > 0 \Leftrightarrow \frac{m^2}{4} + (m+1)^2 - 1 > 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{5}{4}m^2 + 2m > 0 \Leftrightarrow m < -\frac{8}{5} \text{ hoặc } m > 0$$

b) Với điều kiện $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$ thì (1) là phương trình đường tròn có tâm $I\left(-\frac{m}{2}; m+1\right)$ Ta có tọa độ của I : $\begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = m + 1 \end{cases}$

Khử m từ hoành độ và tung độ của I ta được: $2x - y - 1 = 0$ vì $m < -\frac{8}{5}$ hoặc $m > 0$ nên $x = -\frac{m}{2} > \frac{4}{5}$ hoặc $x < 0$

Vậy tập hợp tâm I của đường tròn là: $\begin{cases} 2x + y - 1 = 0 \\ x < 0 \vee x > \frac{4}{5} \end{cases}$

7. *a) Biết đường tròn* (ε) *có phương trình* $x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$. *Chứng minh rằng phương tích của điểm* $M(x_0, y_0)$ *đối với đường tròn* $(\mathscr{E})$ *bằng* $x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$

b) Chứng minh rằng nếu hai đường tròn không đồng tâm thì tập hợp các điểm có cùng phương tích đối với hai đường tròn là một đường thẳng (gọi là trục đẳng phương của hai đường tròn).

● ***Giải***

a) Đường tròn $(\mathscr{E})$ có tâm $I(-a; -b)$, bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2 - c}$. Phương tích của điểm $M(x_0; y_0)$ đối với dường tròn $(\mathscr{E})$ là:

$$\mathscr{P}_{M/(\varepsilon)} = MI^2 - R^2 = (x_0 + a)^2 + (y_0 + b)^2 - (a^2 + b^2 - c)$$

$$= x_0^2 + y_0^2 + 2ax_0 + 2by_0 + c$$

b) Cho hai đường tròn không đồng tâm :

$(\mathscr{E}_1)$: $x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$

$(\mathscr{E}_2)$: $x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$

Gọi M $(x_0; y_0)$ là điểm có cùng phương tích đối với $(\mathcal{E}_1)$ và $(\mathcal{E}_2)$ thì:

$$x_0^2 + y_0^2 + 2a_1x_0 + 2b_1y_0 + c_1 = x_0^2 + y_0^2 + 2a_2x_0 + 2b_2y_0 + c_2$$

$$\Leftrightarrow 2(a_1 - a_2)x_0 + a(b_1 - b_2)y_0 + c_1 - c_2 = 0 \qquad (1)$$

Vì $(\mathcal{E}_1)$ và $(\mathcal{E}_2)$ không đồng tâm nên $a_1 - a_2$ và $b_1 - b_2$ không đồng thời bằng 0 (tức $(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 \neq 0$).

Do đó $M(x_0; y_0)$ nằm trên đường thẳng có phương trình :

$$\Delta : \Leftrightarrow 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

Vậy tập hợp điểm M là đường thẳng Δ.

8. *Cho hai đường tròn có phương trình :*

$$(\mathcal{E}_1) : x^2 + y^2 + 2a_1x + 2b_1y + c_1 = 0$$

$$(\mathcal{E}_2) : x^2 + y^2 + 2a_2x + 2b_2y + c_2 = 0$$

Giả sử chúng cắt nhau tại hai điểm M và N. Viết phương trình đường thẳng MN.

● ***Giải.*** $(\mathcal{E}_1)$ và $(\mathcal{E}_2)$ cắt nhau tại M, N thì trục đẳng phương của $(\mathcal{E}_1)$ và $(\mathcal{E}_2)$ chính là đường thẳng M, N.

Áp dụng bài 7 thì MN có phương trình là:

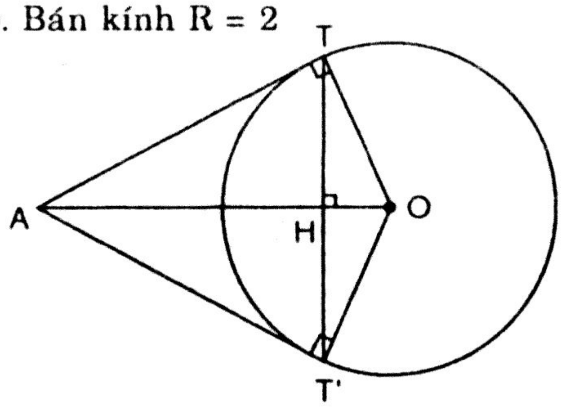
$$MN : 2(a_1 - a_2)x + 2(b_1 - b_2)y + c_1 - c_2 = 0$$

9. *Cho đường tròn $(\mathcal{E}) : x^2 + y^2 = 4$ và điểm $A(-2;3)$*

a) Viết phương trình các tiếp tuyến của $(\mathcal{E})$ kẻ từ A.

b) Tính các khoảng cách từ A đến hai tiếp điểm của hai tiếp tuyến nói ở câu a) và khoảng cách giữa hai tiếp điểm đó.

●***Giải***. Đường tròn (ε) có tâm O(0; 0). Bán kính R = 2



a) Đường thẳng Δ qua A có dạng:

$$a(x + 2) + b(y - 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow ax + by + 2a - 3b = 0$$

Δ là tiếp tuyến của (ε)

$$\Leftrightarrow d(O; \Delta) = R \Leftrightarrow \frac{|2a - 3b|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 2$$

$$\Leftrightarrow (2a - 3b)^2 = 4(a^2 + b^2)$$

$$\Leftrightarrow 5b^2 - 12ab = 0$$

$$\Leftrightarrow b(5b - 12a) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} b = 0 \\ 12a = 5b \end{array}\right.$$

- Với b = 0 chọn a = 1 ta có tiếp tuyến:

  $\Delta_1 : x + 2 = 0$

- Với 12a = 5b, chọn a = 5, b = 12 ta có tiếp tuyến:

  $\Delta_2 : 5x + 12y - 26 = 0$

b) Gọi T, T' là tiếp điểm của Δ_1, Δ_2 : với $(\mathcal{C})$.

Ta có: $AT = AT' = \sqrt{AO^2 - R^2} = \sqrt{13-4} = 3$

Gọi H là giao điểm của TT' và AO.

TH là đường cao của tam giác vuông ATO, ta có :

$$\frac{1}{TH^2} = \frac{1}{AT^2} + \frac{1}{TO^2} = \frac{1}{9} + \frac{1}{4} = \frac{13}{36}$$

$$\Rightarrow TH = \frac{6}{\sqrt{13}} \Rightarrow TT' = 2TH = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

***10.** Cho elip (E) : $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ và hypebol (H): $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$*

a) Tìm toạ độ các tiêu điểm của (E) và (H).

b) Vẽ elip (E) và hypebol (H) trong cùng một hệ trục tọa độ.

c) Tìm toạ độ các giao điểm của (E) và (H).

- ***Giải***

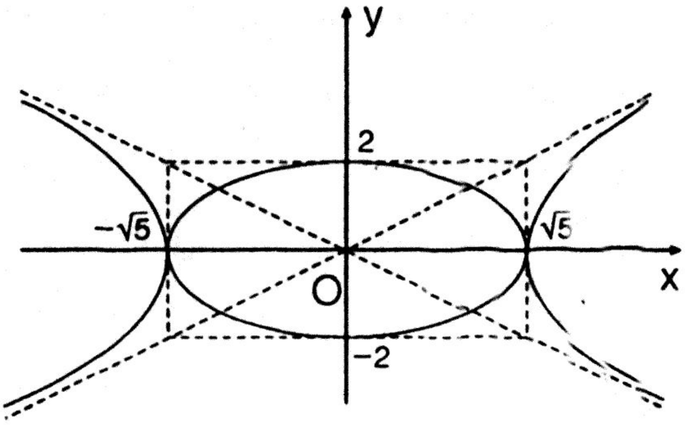
a) Với (E) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ ta có : $a = \sqrt{5}$, $b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$.

Toạ độ các tiêu điểm của (E) là $F_1(-1; 0)$, $F_2(1; 0)$

Với (H): $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$ ta có : $a = \sqrt{5}$,

$b = 2 \Rightarrow c = \sqrt{a^2 + b^2} = 3$.

Tọa độ các tiêu điểm của (H) là $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$.



b) Vẽ (E) và (H).

c) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ \frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 5 \\ y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt{5} \\ y = 0 \end{cases}$$

Vậy toạ độ giao điểm của (E) và (H) là ($\sqrt{5}$; 0) và ($-\sqrt{5}$; 0).

11. Cho đường thẳng $\Delta: 2x - y - m = 0$ *và elip (E) :* $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

a) Với giá trị nào của m thì Δ *cắt (E) tại hai điểm phân biệt ?*

b) Với giá trị nào của m thì Δ *cắt (E) tại một điểm duy nhất ?*

● ***Giải.*** Tọa độ giao điểm của Δ và (E) là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} 2x - y - m = 0 \\ \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x - m & (1) \\ \dfrac{x^2}{5} + \dfrac{(2x - m)^2}{4} = 1 & (2) \end{cases}$$

Ta có (2) : $\Leftrightarrow 4x^2 + 5(4x^2 - 4mx + m^2) = 20$

$\Leftrightarrow 24x^2 - 20mx + 5m^2 - 20 = 0 \qquad (*)$

a) Δ cắt (E) tại hai điểm phân biệt

$\Leftrightarrow (*)$ có 2 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow \Delta' = 100m^2 - 24(5m^2 - 20) > 0$

$\Leftrightarrow -20m^2 + 480 > 0 \Leftrightarrow |m| < 2\sqrt{6}$

$\Leftrightarrow -2\sqrt{6} < m < 2\sqrt{6}$

b) Δ cắt (E) tại một điểm duy nhất $\Leftrightarrow m = \pm 2\sqrt{6}$

12. *Cho elip (E):* $\dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1$

a) Xác định tọa độ hai tiêu điểm và các đỉnh của (E).

b) Viết phương trình chính tắc của hypebol (H) nhận các tiêu điểm của (E) làm đỉnh và có hai tiêu điểm là hai đỉnh của elip (E).

c) Vẽ phác (E) và (H) ở câu b) trên cùng một hệ trục tọa độ.

d) Viết phương trình của đường tròn đi qua các giao điểm của hai đường cônic nói trên.

● ***Giải***

a) Ta có: $a = 5$, $b = 3$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{25 - 9} = 4$

Tọa độ các tiêu điểm của (E): $F_1(-4; 0)$, $F_2(4; 0)$

Tọa độ các đỉnh của (E): $A_1(-5; 0)$, $A_2(5; 0)$, $B_1(0; -3)$, $B_2(0; 3)$.

b) (H) nhận $(-4; 0)$ và $(4; 0)$ làm đỉnh thì $a = 4$.

(H) nhận $(-5; 0)$ và $(5; 0)$ làm tiêu điểm thì có $c = 5$.

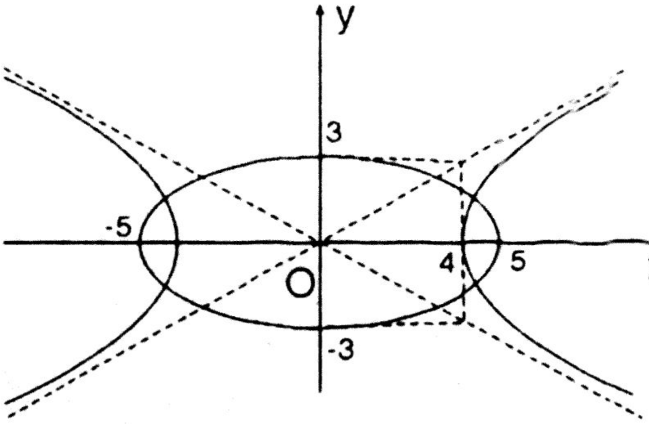
$\Rightarrow b^2 = c^2 - a^2 = 25 - 16 = 9 \Rightarrow b = 3$

Vậy phương trình chính tắc của hypebol (H) là: $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

c) Vẽ (E) và (H).

d) Tọa độ giao điểm của (E) và (H) là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{25} + \dfrac{y^2}{9} = 1 \\ \dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{9} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = \dfrac{800}{41} \\ y^2 = \dfrac{81}{41} \end{cases}$$



Vậy (E) và (H) cắt nhau tại 4 điểm có tọa độ thoả phương trình: $x^2 + y^2 = \dfrac{881}{41}$

Vậy đường tròn đi qua các giao điểm (E) và (H) có phương trình là:

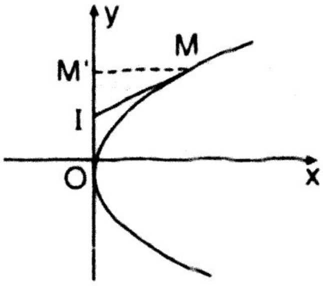
$$x^2 + y^2 = \frac{881}{41}$$

13. *Cho parabol (P) : $y^2 = 2px$. Với mỗi điểm M trên (P) (M khác O). Gọi M' là hình chiếu của M trên Oy và I là trung điểm của đoạn OM'. Chứng minh rằng đường thẳng IM cắt (P) tại một điểm duy nhất.*

● ***Giải***. Giả sử $M(x_0, y_0) \in (P)$ ta có $y_0^2 = 2px_0$ ($x_0 \neq 0$)

M' là hình chiếu của M trên Oy nên $M'(0; y_0)$, khi đó

$I(0; \frac{y_0}{2}) \Rightarrow \overrightarrow{IM} = \left(x_0; \frac{y_0}{2}\right)$ là vectơ chỉ phương của đường thẳng IM.



Phương trình tham số của IM là : $\begin{cases} x = x_0 \cdot t \\ y = \dfrac{y_0}{2} + \dfrac{y_0}{2} \cdot t \end{cases}$

Thay x,y trong phương trình tham số của IM vào phương trình của (P) ta được: $\dfrac{y_0^2}{4}(1+t)^2 = 2p \cdot x_0 \cdot t$

mà $2px_0 = y_0^2$ nên $y_0^2(1+t)^2 = 4y_0^2 \cdot t \Leftrightarrow (1+t)^2 = 4 \cdot t$ (do $y_0 \neq 0$)

$$\Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Vậy IM cắt (P) tại điểm duy nhất $M(x_0; y_0)$.

14. *Cho parabol (P): $y^2 = \frac{1}{2}x$, gọi M, N là hai điểm di động trên (P) sao cho $OM \perp ON$ (M, N không trùng với O). Chứng minh rằng đường thẳng MN luôn đi qua một điểm cố định.*

Giải. Giả sử $M(2y_1^2, y_1) \in (P)$ và $N\left(2y_2^2, y_2\right) \in (P)$ trong đó $y_1, y_2 \neq 0$ và

$y_1 \neq y_2$ vì $\overrightarrow{OM}\cdot\overrightarrow{ON}=0$ nên $4y_1^2y_2^2+y_1y_2=0$

$$\text{suy ra } 4y_1y_2+1=0 \Leftrightarrow y_1y_2=-\frac{1}{4}$$

Ta có $\overrightarrow{MN}=\left(2y_2^2-2y_1^2;y_2-y_1\right)=\left(y_2-y_1\right)\cdot\left(2y_2+2y_1;1\right)$

Vì $y_1 \neq y_2$ nên vectơ chỉ phương của đường thẳng MN là $(2y_1+2y_2;1)$.

Do đó vectơ pháp tuyến của MN là $\vec{n}=\left(1,-2y_1-2y_2\right)$

Phương trình tổng quát của MN là:

$$1\cdot\left(x-2y_1^2\right)-\left(2y_1+2y_2\right)\cdot\left(y-y_1\right)=0 \qquad (*)$$

Tìm giao điểm của MN với trục hoành bằng cách thay $y = 0$ vào (*) ta được: $x-2y_1^2+2y_1^2+2y_1y_2=0 \quad \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$

Vậy MN đi qua điểm $\left(\frac{1}{2};0\right)$ cố định.

B. BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

1. *Đường thẳng $2x+y-1=0$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào ?*

(A) $\vec{n}=(2;-1)$; (B) $\vec{n}=(1;-1)$

(C) $\vec{n}=(2;1)$; (D) $\vec{n}=(-1;2)$

Trả lời. Đường thẳng $2x+y-1=0$ có vectơ pháp tuyến $\vec{n}=(2;1)$. **Chọn (C)**

2. *Đường trung trực của đoạn thẳng AB với $A=(-3;2)$, $B=(-3;3)$ có vectơ pháp tuyến là vectơ nào ?*

(A) $\vec{n}=(6;5)$; (B) $\vec{n}=(0;1)$

(C) $\vec{n}=(-3;5)$; (D) $\vec{n}=(-1;0)$

Trả lời. Đường trung trực của đoạn AB có vectơ pháp tuyến là $\overrightarrow{AB}=(0;1)$. **Chọn (B).**

3. *Phương trình nào là phương trình tham số của đường thẳng $x-y+3=0$?*

(A) $\begin{cases}x=t\\ y=3+t\end{cases}$; (B) $\begin{cases}x=3\\ y=t\end{cases}$ (C) $\begin{cases}x=2+t\\ y=1+t\end{cases}$; (D) $\begin{cases}x=t\\ y=3-t\end{cases}$

Trả lời. Đặt $x = t$ thì $y = t + 3$. **Chọn (A)**

4. *Vectơ nào là vectơ pháp tuyến của đường thẳng có phương trình* $\begin{cases}x=-1+2t\\ y=3-t\end{cases}$?

(A) $\vec{n}=(2;-1)$; (B) $\vec{n}=(-1;2)$

(C) $\vec{n}=(1;-2)$; (D) $\vec{n}=(1;2)$

Trả lời. Đường thẳng đã cho có vectơ chỉ phương $\vec{u} = (2;-1)$ nên có vectơ pháp tuyến là : $\vec{n} = (1;2)$ **Chọn (D)**

5. *Đường thẳng nào không cắt đường thẳng $2x + 3y - 1 = 0$?*

(A) $2x + 3y + 1 = 0$; (B) $x - 2y + 5 = 0$

(C) $2x - 3y + 3 = 0$; (D) $4x - 6y - 2 = 0$

Trả lời. Ta có đường thẳng $2x + 3y + 1 = 0$ song song với đường thẳng $2x+3y-1 = 0$ **Chọn (A)**

6. *Đường thẳng nào song song với đường thẳng $x - 3y + 4 = 0$?*

(A) $\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 + t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 1 - 3t \\ y = 2 - t \end{cases}$

Trả lời. Vectơ chỉ phương của đường thẳng $x - 3y + 4 = 0$ là $\vec{n} = (3\ 1)$ **Chọn (D)**

7. *Đường thẳng nào song song với đường thẳng:* $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

(A) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = 2t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 5 + t \\ y = -2t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 5 - 2t \\ y = t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 5 + 4t \\ y = 2t \end{cases}$

Trả lời. Vectơ chỉ phương của đường thẳng $\begin{cases} x = 3 - t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ là: $\vec{u} = (-1;2)$

Chọn (B).

8. *Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng $4x - 3y + 1 = 0$?*

(A) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$; (B) $\begin{cases} x = 4t \\ y = -3 + 3t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = -4t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$; (D) $\begin{cases} x = 8t \\ y = -3 + t \end{cases}$

Trả lời. Vectơ pháp tuyến của dường thẳng $4x - 3y + 1 = 0$ là $\vec{n} = (4\ ;-3)$. **Chọn (A).**

9. *Đường thẳng nào vuông góc với đường thẳng:* $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$

(A) $2x + y + 1 = 0$; (B) $x + 2y + 1 = 0$

(C) $4x - 2y + 1 = 0$; (D) $\dfrac{x + 1}{1} = \dfrac{y + 1}{2}$

Trả lời. Vectơ chỉ phương của $\begin{cases} x = -1 + t \\ y = -1 + 2t \end{cases}$ là $\vec{u} = (1\,;2)$. **Chọn (B).**

10. *Khoảng cách từ O(0; 0) đến đường thẳng 4x – 3y – 5 = 10 bằng bao nhiêu?*

(A) 0 ; *(B) 1* *(C) –5 ;* *(D)* $\frac{1}{5}$

Trả lời.: Ta có $d(O\,;\Delta) = \dfrac{|-5|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = 1$. **Chọn (B).**

11. *Phương trình nào là phương trình của đường tròn có tâm I(–3; 4) và bán kính R = 2 ?*

(A) $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 - 4 = 0$; *(B)* $(x - 3)^2 + (y - 4)^2 = 4$

(C) $(x + 3)^2 + (y + 4)^2 = 4$; *(D)* $(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2$

Trả lời. **Chọn (A)**

12. *Phương trình* $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ *là phương trình của đường tròn nào?*

(A) Đường tròn có tâm (–1; 2), bán kính R = 1;

(B) Đường tròn có tâm (1; –2), bán kính R = 2;

(C) Đường tròn có tâm (2; –4), bán kính R = 2;

(D) Đường tròn có tâm (1; –2), bán kính R = 1;

Trả lời. Ta có $a = -1; b = 2; c = 1 \Rightarrow R = \sqrt{a^2 + b^2 - c} = 2$

$(\mathscr{C})$ có tâm I(1; –2) bán kính R = 2. **Chọn (B)**

13. *Cặp điểm nào là các tiêu điểm của elip (E) :* $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$?

(A) $F_{1,2} = (\pm 1;0)$; *(B)* $F_{1,2} = (\pm 3;0)$

(C) $F_{1,2} = (0;\pm 1)$; *(D)* $F_{1,2} = (1;\pm 2)$

Trả lời. Ta có : $a = \sqrt{5}$, $b = 2$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1$. **Chọn (A).**

14. *Elip (E) :* $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ *có tâm sai bằng bao nhiêu ?*

(A) $e = \dfrac{3}{2}$; *(B)* $e = -\dfrac{\sqrt{5}}{3}$; *(C)* $e = \dfrac{2}{3}$; *(D)* $e = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Trả lời. Ta có :$a = 3, b = 2, c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{5} \Rightarrow e = \dfrac{c}{a} = \dfrac{\sqrt{5}}{3}$

Chọn (D)

15. *Cho elip có các tiêu điểm* $F_1(-3; 0)$, $F_2(3; 0)$ *và đi qua A(–5; 0). Điểm M (x; y) thuộc elip đã cho có các bán kính qua tiêu điểm là bao nhiêu ?*

(A) $MF_1 = 5 + \dfrac{3}{5}x,\ MF_2 = 5 - \dfrac{3}{5}x;$

(B) $MF_1 = 5 + \frac{4}{5}x$, $MF_2 = 5 - \frac{4}{5}x$;

(C) $MF_1 = 3 + 5x$, $MF_2 = -3 - 5x$;

(D) $MF_1 = 5 + 4x$, $MF_2 = 5 - 4x$

Trả lời. Giả sử (E) : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$; $A(-5; 0) \in (E)$ nên $25 = a^2 \Rightarrow a = 5$

Tiêu điểm : $F_1 = (-3;0)$ nên $c = 3$

$$r_1 = MF_1 = a + \frac{cx}{a} = 5 + \frac{3}{5}x, \qquad MF_2 = 5 - \frac{3}{5}x$$ **. Chọn (A)**

16. *Elip (E):* $\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 1$*, với* $p > q > 0$*, có tiêu cự là bao nhiêu ?*

(A) $p + q$; *(B)* $p^2 - q^2$; *(C)* $p - q$; *(D)* $2\sqrt{p^2 - q^2}$

Trả lời. Ta có: $a = p$, $b = q$, $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{p^2 - q^2}$

Tiêu cự $2c = 2\sqrt{p^2 - q^2}$. **Chọn D**

17. *Phương trình* $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ *là phương trình chính tắc của đường nào ?*

(A) Elip với trục lớn bằng 2a, trục bé bằng 2b;

(B) Hypebol với trục lớn bằng 2a, trục bé bằng 2b;

(C) Hypebol với trục hoành bằng 2a, trục tung bằng 2b;

(D) Hypebol với trục thực bằng 2a, trục ảo bằng 2b;

Trả lời. **Chọn (D)**

18. *Cặp điểm nào có các tiêu điểm của hypebol* $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{5} = 1$ *?*

(A) $(\pm 4;0)$; *(B)* $(\pm\sqrt{14};0)$

(C) $(\pm 2;0)$; *(D)* $(0;\pm\sqrt{14})$

Trả lời. Ta có $a = 3$, $b = \sqrt{5}$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{14}$. **Chọn (B)**

19. *Cặp đường nào là các đường tiệm cận của hypebol* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{25} = 1$ *?*

(A) $y = \pm\frac{5}{4}x$ *(B)* $y = \pm\frac{4}{5}x$

(C) $y = \pm\frac{25}{16}x$; *(D)* $y = \pm\frac{16}{25}x$

Trả lời. Ta có : $a = 4$, $b = 5$. Phương trình các đường tiệm cận là :

$$y = \pm\frac{5}{4}x$$ **. Chọn (A).**

20. *Cặp đường nào là các đường chuẩn hypebol* $\frac{x^2}{p^2} - \frac{y^2}{q^2} = 1$ *?*

(A) $x = \pm\frac{p}{x}$;		*(B)* $x = \pm\frac{q}{p}$

(C) $x = \pm\frac{q^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$;		*(D)* $x = \pm\frac{p^2}{\sqrt{q^2 + p^2}}$

Trả lời. Đường chuẩn của hypebol có phương trình $x = \pm\frac{a}{e} = \pm\frac{a^2}{c}$

Ta có: $a = q$, $b = p$, $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{p^2 + q^2}$. **Chọn (C).**

21. *Đường tròn nào ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của hypebol* $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ *?*

(A) $x^2 + y^2 = 25$;		*(B)* $x^2 + y^2 = 7$

(C) $x^2 + y^2 = 16$;		*(D)* $x^2 + y^2 = 9$

Trả lời. Đường tròn nào ngoại tiếp hình chữ nhật cơ sở của hypebol có bán kính $R = \sqrt{a^2 + b^2}$. Ta có: $a = 4$, $b = 3$. **Chọn (A).**

22. *Điểm nào là tiêu điểm của parabol* $y^2 = 5x$ *?*

(A) $F(5; 0)$;	*(B)* $F(\frac{5}{2};0)$;	*(C)* $F(\pm\frac{5}{4};0)$;	*(D)* $F(\frac{5}{4};0)$;

Trả lời. Ta có $p = \frac{5}{2}$. Tiêu điểm của parabol là $F(\frac{5}{4}; 0)$. **Chọn (D).**

23. *Đường thẳng có phương trình nào là đường chuẩn của parabol* $y^2 = -4x$ *?*

(A) $x = 4$;	*(B)* $x = -2$	*(C)* $x = \pm 1$;	*(D)* $x = 1$

Trả lời. $p = 2$. **Chọn (D).**

24. *Cônic có tâm sai* $e = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *là đường nào ?*

(A) Hypebol;		*(B) Parabol;*

(C) Elip;		*(D) Đường tròn.*

Trả lời. **Chọn (C).**

C. BÀI TẬP ÔN LÀM THÊM

1. Tìm trên trục hoành điểm P sao cho tổng các khoảng cách từ P đến các điểm A(1; 2), và B(3; 4) là nhỏ nhất.

- ***Hướng dẫn.*** Gọi A' là điểm đối xứng của A qua Ox.

PA + PB nhỏ nhất khi B, P, A' thẳng hàng. $P\left(\frac{5}{3};0\right)$

2. Cho đường thẳng $\Delta: 2x + y - 4 = 0$ và hai điểm M(3; 3), N(−5; 19). Kẻ $MH \perp \Delta$ và gọi P là điểm đối xứng của M qua Δ. Tìm M trên Δ sao cho AM + AN có giá trị nhỏ nhất.

Đáp số. M(−3; 10)

3. Cho tam giác ABC có trọng tâm G(−2; −1) và các cạnh AB: $4x + y + 15 = 0$; AC: $2x + 5y + 3 = 0$.

a) Tìm tọa độ đỉnh A và tọa độ trung điểm M của BC.

b) Tìm tọa độ đỉnh B và viết phương trình đường thẳng BC.

4. Cho đường tròn (C) : $x^2 + y^2 = 1$. Đường tròn (C) cắt trục tung tại A(0; 1) và B(0; −1)

Đường thẳng $y = m$ $(-1 < m < 1,\ m \neq 0)$ cắt (C) tại S và T. Tìm tập hợp các điểm P khi m thay đổi.

● ***Hướng dẫn***. Gọi S(n, m) thì T(−n ; m) ta có: $m^2 + n^2 = 1$. Gọi P(x; y) ta có hệ: $\begin{cases} mx + (y-1)n = x \\ -mx + (y+1)n = x \end{cases}$

Tìm được $m = \dfrac{1}{y}$, $n = \dfrac{x}{y}$ từ $m^2 + n^2 = 1$. Suy ra : $x^2 - y^2 = -1$

5. Cho elip (E) : $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$.

Gọi AA′ là trục lớn của (E) : AT và A′T′ là các tiếp tuyến của (E). Một tiếp tuyến tồn tại $M \in (E)$ cắt AT và AT′ lần lượt tại T và T′.

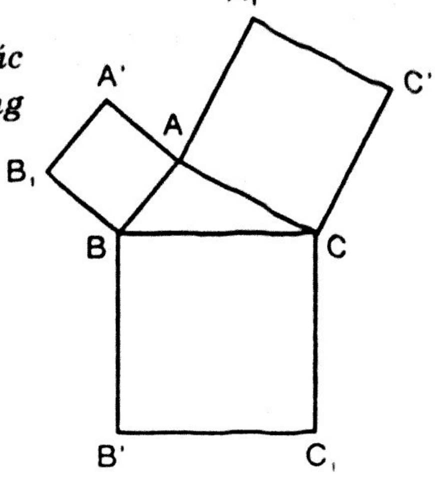
a) Chứng minh rằng AT và AT′ không phụ thuộc vào M.

b) Tìm tập hợp giao điểm N của AT′ và A′T′ khi M chạy trên (E).

c) Chứng minh rằng đường tròn đường kính TT′ đi qua các tiêu điểm của (E).

BÀI TẬP ÔN CUỐI NĂM

1. *Trên hình vuông ta có tam giác ABC và các hình vuông $AA'B_1B$, $BB'C_1C$, $CC'A_1A$. Chứng minh các đẳng thức sau:*



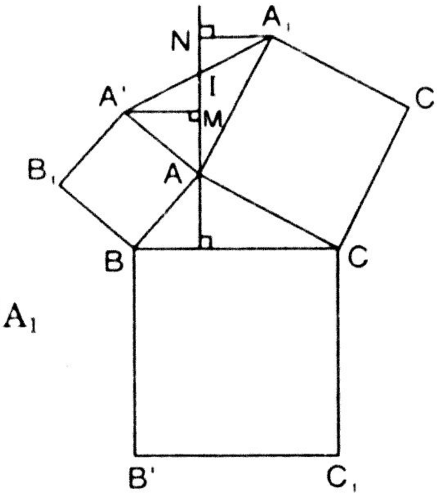
a) $\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right)\overrightarrow{AC} = 0$;

b) $\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right)\overrightarrow{AC} = 0$;

c) $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0}$;

d) $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \vec{0}$

• Giải



a) Kẻ $AH \perp BC$ ta chứng minh đường thẳng AH cắt $A'A_1$ tại trung điểm I của $A'A_1$. Kẻ $A'M \perp AH$, $A_1N \perp AH$.

Ta có: $\Delta AHB = \Delta A'MA \Rightarrow A'M = AN$

$\Delta AHC = \Delta A_1NA \Rightarrow A_1N = AH$

Từ đó suy ra $\Delta IMA' = \Delta INA_1 \Rightarrow IA' = IA_1$

Tương tự gọi J là trung điểm B_1B' thì

$BJ \perp AC$.

Ta có: $\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BB_1} + \overrightarrow{BB'} = 2\overrightarrow{BJ}$

$\Rightarrow \left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'}\right)\overrightarrow{AC} = 0$

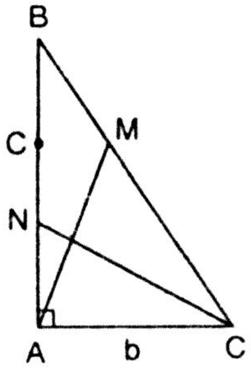
b) Theo câu a) và $\overrightarrow{CC'} \perp \overrightarrow{AC}$ nên $\left(\overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}\right)\overrightarrow{AC} = 0$

c) Đặt: $\vec{u} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'}$

Ta có: $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = 0$ và $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$. Suy ra: $\vec{u} = \vec{0}$

d) Ta có: $\overrightarrow{AB_1} + \overrightarrow{BC_1} + \overrightarrow{CA_1} = \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{CA}$

$= \overrightarrow{AA'} + \overrightarrow{BB'} + \overrightarrow{CC'} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \vec{0}$



2. *Cho tam giác ABC vuông tại A, AB = c, AC = b. Gọi M là điểm trên cạnh BC sao cho CM = 2BM, N là điểm trên cạnh AB sao cho BN = 2AN.*

a) Biểu thị các vectơ $\overrightarrow{AM}$ và $\overrightarrow{CN}$ theo hai vectơ $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{AC}$.

b) Tìm hệ thức liên hệ giữa b và c sao cho $AM \perp CN$.

• Giải

a) Ta có: $\overrightarrow{CM} = 2\overrightarrow{MB} \Rightarrow \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{AC} = 2\left(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AM}\right) \Rightarrow \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

Mặt khác : $\overrightarrow{BN} = 2\overrightarrow{NA} \Rightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AN} \Rightarrow \overrightarrow{AN} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$

$\Rightarrow \overrightarrow{CN} = \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$

b) $AM \perp CN \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{CN} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}\right)$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}AB^2 - \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} + \frac{1}{9}\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} - \frac{1}{3}AC^2 = 0$

$\Leftrightarrow \frac{2}{9}c^2 - \frac{1}{3}b^2 = 0 \Leftrightarrow 2c^2 = 3b^2$

3. *Cho tam giác ABC với AB = 4, AC = 5, BC = 6.*

a) Tính các góc A, B, C.

b) Tính độ dài các đường trung tuyến và diện tích tam giác.

c) Tính các bán kính đường tròn nội tiếp và ngoại tiếp tam giác ABC.

● ***Giải***

a) Ta có $a = 6$, $b = 5$, $c = 4$

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{25 + 16 - 36}{40} = \frac{1}{8} \qquad \Rightarrow A \approx 83^0$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \frac{36 + 16 - 25}{40} = \frac{27}{48} = \frac{9}{16} \Rightarrow B \approx 56^0$$

$$\Rightarrow C \approx 41^\circ$$

b) $$m_a^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) = \frac{1}{4}(50 + 32 - 36) = \frac{46}{4} \Rightarrow m_a = \frac{\sqrt{46}}{2}$$

$$m_b^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) = \frac{79}{4} \qquad \Rightarrow m_b = \frac{\sqrt{79}}{2}$$

$$\Rightarrow m_c = \frac{\sqrt{106}}{2}$$

4. *Cho tam giác ABC.*

a) Tam giác ABC có tính chất gì nếu $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a}$?

b) Biết $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c}$, *chứng minh rằng* $2\sin A = \sin B + \sin C$.

● ***Giải***

a) Ta có $a^2 = \dfrac{b^3 + c^3 - a^3}{b + c - a} \Leftrightarrow a^2b + a^2c - a^3 = b^3 + c^3 - a^3$

$$\Leftrightarrow a^2(b + c) = (b + c)\left(b^2 - bc + c^2\right) \Leftrightarrow a^2 = b^2 + c^2 - bc$$

Áp dụng định lí Côsi ta có:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A \quad \text{do đó } \cos A = \frac{1}{2} \Leftrightarrow A = 60^0$$

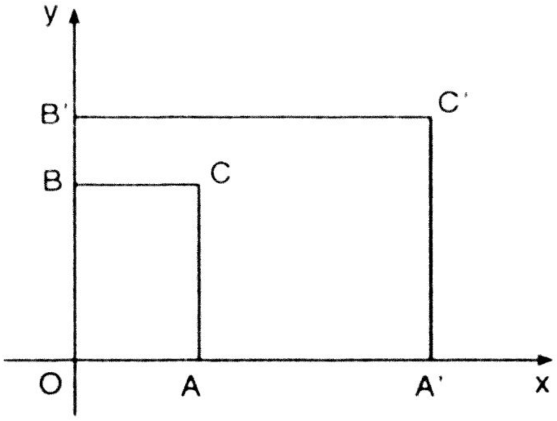
Vậy tam giác ABC có góc A bằng 60^0.

b) Ta có $S = \dfrac{1}{2}ah_a \Rightarrow h_a = \dfrac{2S}{a}$ tương tự $h_b = \dfrac{2S}{b}$; $h_c = \dfrac{2S}{c}$

Do đó: $\dfrac{2}{h_a} = \dfrac{1}{h_b} + \dfrac{1}{h_c} \quad \Leftrightarrow \quad 2a = b + c$

$$\Leftrightarrow \quad 2.2R\sin A = 2R\sin B + 2R\sin C \Leftrightarrow 2\sin A = \sin B + \sin C$$

5. *Trong mặt phẳng toạ độ Oxy, cho hai hình chữ nhật OACB và O'A'B'C' như hình bên. Biết* $A(a; O)$, $A'(a'; O)$, $B(O; b)$, $B'(O; b')$, (a, a', b, b', c, c' *là những số dương,* $a \neq a', b \neq b'$).



a) *Viết phương trình các đường thẳng AB′ và A′B*

b) *Tìm liên hệ giữa a, b, a′ và b′ để hai đường thẳng AB′ và A′B cắt nhau. Trong trường hợp hai đường thẳng AB′ và A′B cắt nhau, hãy tìm tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng đó.*

c) *Chứng minh rằng ba điểm I, C, C′ thẳng hàng.*

d) *Với điều kiện nào của a, b, a′, b′ thì C là trung điểm của IC′?*

- ***Giải***

a) Áp dụng phương trình đường thẳng theo đoạn chắn

Ta có : $AB': \dfrac{x}{a} + \dfrac{y}{b'} = 1$

$A'B: \dfrac{x}{a'} + \dfrac{y}{b} = 1$

b) AB′ và A′B cắt nhau $\Leftrightarrow \dfrac{a}{a'} \neq \dfrac{b'}{b} \Leftrightarrow ab - a'b' \neq 0$. Tọa độ giao điểm I của AB′ và A′B là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} b'x + ay = ab' \\ bx + a'y = a'b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab} \\ y = \dfrac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab} \end{cases} \quad \text{Vậy } I\left(\dfrac{aa'(b'-b)}{a'b'-ab}; \dfrac{bb'(a'-a)}{a'b'-ab}\right)$$

c) Ta có $C(a, b)$, $C'(a'; b')$

$$\overrightarrow{CI} = \left(-\dfrac{ab(a'-a)}{a'b'-ab}; -\dfrac{ab(b'-b)}{a'b'-ab}\right) = -\dfrac{ab}{a'b'-ab}\overrightarrow{CC'}$$

Suy ra: C, C′, I thẳng hàng.

C là trung điểm IC′ $\Leftrightarrow \overrightarrow{CI} + \overrightarrow{CC'} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{CI} = -\overrightarrow{CC'}$

$$\Leftrightarrow \dfrac{ab}{a'b'-ab} = 1 \Leftrightarrow a'b' = 2ab$$

6. *Trong mặt phẳng tọa độ cho hai điểm A(3; 4) và B(6; 0).*

a) *Nhận xét gì về tam giác OAB? Tính diện tích của tam giác đó.*

b) *Viết phương trình đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB.*

c) Viết phương trình đường phân giác trong tại đỉnh O của tam giác OAB.

d) Viết phương trình đường tròn nội tiếp tam giác OAB.

● ***Giải***

a) Ta có: $OA = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$; $OB = \sqrt{6^2 + 0} = 6$

$$AB = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$$

ΔOAB cân tại A. Gọi I là trung điểm OB ta có I(3; 0)

và $AI = \sqrt{(3-3)^2 + (0-4)^2} = 4$

Diện tích tam giác OAB bằng: $S = \frac{1}{2} \cdot AI \cdot OB = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 6 = 12$

b) Đường tròn ngoại tiếp ΔOAB có dạng:

$$(C): x^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

Vì O, A, B $\in$ (C) nên $\begin{cases} c = 0 \\ 9 + 16 + 6a + 8b + c = 0 \\ 36 + 12a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -3 \\ b = -\frac{7}{8} \\ c = 0 \end{cases}$

Vậy $(C): x^2 + y^2 - 6x - \frac{7}{4}y = 0$

c) Phương trình đường thẳng OA: $\frac{x}{3} = \frac{y}{4} \Leftrightarrow 4x - 3y = 0$

Phương trình đường thẳng OB: $y = 0$

Phương trình các đường phân giác của OA và OB là:

$$\frac{4x - 3y}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \pm\frac{y}{1} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 4x - 3y = 5y & (d_1) \\ 4x - 3y = -5y & (d_2) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 4x - 8y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x - 2y = 0 \\ 2x + y = 0 \end{array}\right.$$

Với $d_1: x - 2y = 0$ ta có $(x_A - 2y_A)(x_B - 2y_B) = -5.6 = -30 < 0$

$\Rightarrow$ A và B khác phía đối với d_1, do đó d_1 là đường phân giác trong góc O của tam giác OAB.

d) Vì ΔOAB cân tại A nên AI là phân giác trong góc A của ΔOAB, ta có $\overrightarrow{AI} = (0; -4)$ nên $x = 3$ là phương trình đường thẳng AI.

Toạ độ tâm J của đường tròn nội tiếp tam giác OAB là nghiệm hệ phương trình:

$$\begin{cases} x = 3 \\ x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = \dfrac{3}{2} \end{cases} \quad \text{Vậy } J\left(3; \frac{3}{2}\right)$$

Bán kính đường tròn nội tiếp ΔOAB là

$$r = d(J, AO) = \frac{\left|4.3 - 3\frac{3}{2}\right|}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = \frac{3}{2}$$

Vậy phương trình đường tròn nội tiếp của tam giác OAB là:

$$(x - 3)^2 + \left(y - \frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

7. *Trong mặt phẳng toạ độ, với mỗi $m \neq 0$, xét hai điểm $M_1(-4; m)$ và $M_2(4; \frac{16}{m})$.*

a) Viết phương trình đường thẳng M_1M_2.

b) Tính khoảng cách từ gốc tọa độ O tới đường thẳng M_1M_2.

c) Chứng tỏ rằng đường thẳng M_1M_2 luôn tiếp xúc với một đường tròn cố định.

d) Lấy các điểm $A_1(-4; 0)$, $A_2(4; 0)$. Tìm tọa độ giao điểm I của hai đường thẳng A_1M_2 và A_2M_1.

e) Chứng minh rằng khi m thay đổi, I luôn luôn nằm trên một elip (E) cố định. Xác định tọa độ tiêu điểm của elip đó.

- ***Giải***

a) Ta có : $\overrightarrow{M_1M_2} = \left(8; \frac{16}{m} - m\right) = \left(8; \frac{16 - m^2}{m}\right)$

Phương trình đường thẳng M_1M_2 : $\dfrac{x + 4}{8} = \dfrac{y - m}{\dfrac{16 - m^2}{m}}$

$$\Leftrightarrow \left(16 - m^2\right) \cdot (x + 4) = 8m(y - m)$$

$$\Leftrightarrow \left(16 - m^2\right) \cdot x - 8my + 64 + 4m^2 = 0$$

b) Khoảng cách từ O đến đường thẳng M_1M_2.

$$d(O, M_1M_2) = \frac{64 + 4m^2}{\sqrt{\left(16 - m^2\right)^2 + 64m^2}} = \frac{4\left(m^2 + 16\right)}{\sqrt{\left(m^2 + 16\right)^2}} = 4$$

c) Gọi (C) là đường tròn tâm O bán kính $R = 4$ thì M_1M_2 tiếp xúc với đường tròn cố định (C).

d) Phương trình đường thẳng A_1M_2 :

$$\frac{x+4}{8} = \frac{y-0}{\frac{16}{m}} \Leftrightarrow 2x - my + 8 = 0$$

Phương trình đường thẳng A_2M_1 :

$$\frac{x-4}{-8} = \frac{y-0}{m} \Leftrightarrow mx + 8y - 4m = 0$$

Tọa độ giao điểm I của A_1M_2 và A_2M_1 là nghiệm hệ phương trình :

$$\begin{cases} 2x - my + 8 = 0 \\ mx + 8y - 4m = 0 \end{cases} (*) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{4(m^2-16)}{m^2+16} \\ y = \dfrac{16m}{m^2+16} \end{cases}$$

Vậy $I\left(\dfrac{4(m^2-16)}{m^2+16}; \dfrac{16m}{m^2+16}\right)$

e) Khử m từ hệ (*) ta có :

$$\begin{cases} my = 2x + 8 \\ m(4-x) = 8y \end{cases} \Rightarrow (2x+8)\cdot(4-x) = 8y^2$$

$$\Rightarrow 2(16 - x^2) = 8y^2 \Rightarrow x^2 + 4y^2 = 16 \Rightarrow \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

Vậy I nằm trên elip (E) có phương trình : $\dfrac{x^2}{16} + \dfrac{y^2}{4} = 1$

Ta có : $c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow c = 2\sqrt{3}$

Hai tiêu điểm của elip là $F_1(-2\sqrt{3};0), F_2(2\sqrt{3};0)$

8. *Cho hypebol (H) có phương trình* $\dfrac{x^2}{16} - \dfrac{y^2}{4} = 1$.

a) Viết phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H).

b) Tính diện tích hình chữ nhật cơ sở của hypebol (H).

c) Chứng minh rằng các điểm $M(5 ; \frac{3}{2})$ *và* $N(8 ; 2\sqrt{3})$ *đều thuộc (H).*

d) Viết phương trình đường thẳng Δ đi qua M, N và tìm các giao điểm P, Q của Δ với hai đường tiệm cận của hypebol (H).

e) Chứng minh rằng các trung điểm của hai đoạn thẳng PQ và MN trùng nhau.

● ***Giải***

a) Ta có: a = 4, b = 2

Phương trình các đường tiệm cận của hypebol (H) là:

$$y = \pm\frac{b}{a}x = \pm\frac{1}{2}x$$

b) Tính diện tích hình chữ nhật cơ sở của hypebol (H):

$$S = 4ab = 32$$

c) Ta có: $\frac{5^2}{16} - \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2}{4} = 1$ và $\frac{8^2}{16} - \frac{\left(2\sqrt{3}\right)^2}{4} = 1$ nên M và N đều thuộc (H)

d) Phương trình đường thẳng của MN.

$$\Delta : \frac{x-5}{8-5} = \frac{y-\frac{3}{2}}{2\sqrt{3}-\frac{3}{2}} \Leftrightarrow \frac{x-5}{3} = \frac{2y-3}{4\sqrt{3}-3}$$

Giao điểm P của Δ với tiệm cận $y = \frac{1}{2}x$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{3} = \frac{2y-3}{4\sqrt{3}-3} \\ y = \frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 8 + 2\sqrt{3} \\ y = 4 + \sqrt{3} \end{cases} \quad \text{Vậy } P(8 + 2\sqrt{3}; 4 + \sqrt{3})$$

Giao điểm Q của Δ với tiệm cận $y = \frac{1}{2}x$ là nghiệm của hệ:

$$\begin{cases} \frac{x-5}{3} = \frac{2x-3}{4\sqrt{3}-3} \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 - 2\sqrt{3} \\ y = -\frac{5}{2} + \sqrt{3} \end{cases}$$

Vậy $Q\left(5 - 2\sqrt{3}; -\frac{5}{2} + \sqrt{3}\right)$

Gọi I, J lần lượt là trung điểm của MN, PQ

Ta có: $x_I = x_J = \frac{13}{2}$. Do I, J $\in \Delta$ nên I $\equiv$ J.

Vậy các trung điểm của hai đoạn thẳng PQ và MN trùng nhau.

9. *Cho parabol (P) có phương trình $y^2 = 4x$.*

a) Xác định tọa độ tiêu điểm F và phương trình đường chuẩn d của (P).

b) Đường thẳng Δ có phương trình $y = m$ $(m \neq 0)$ lần lượt cắt d, Oy và (P) tại các điểm K, H, M. Tìm tọa độ của các điểm đó.

c) Gọi I là trung điểm của OH. Viết phương trình đường thẳng IM và chứng tỏ rằng đường thẳng IM cắt (P) tại một điểm duy nhất.

d) Chứng minh rằng $MI \perp KF$. Từ đó suy ra MI là phân giác của góc KMF.

- ***Giải***

a) Ta có: $p = 2$. Toạ độ tiêu điểm của (P) là $F(1; 0)$.

Phương trình đường chuẩn d: $x + 1 = 0$

b) Ta có: $K(-1; m)$, $H(0; m)$, $M(\frac{m^2}{4}, m)$

c) I là trung điểm OH nên $I(0; \frac{m}{2})$

Phương trình đường thẳng IM :

$$\frac{x-0}{\frac{m^2}{4}-0} = \frac{y-\frac{m}{2}}{m-\frac{m}{2}} \Leftrightarrow x = \frac{m}{2}\left(y-\frac{m}{2}\right) \Leftrightarrow 4x - 2my + m^2 = 0$$

Tọa độ giao điểm của IM với (P) là nghiệm của hệ :

$$\begin{cases} y^2 = 4x \\ 4x - 2my + m^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ y^2 - 2my + m^2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 4x \\ (y-m)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{m^2}{4} \\ y = m \end{cases}$$

Vậy IM cắt (P) tại một điểm duy nhất $M\left(\frac{m^2}{4}; m\right)$

d) Ta có : $\overrightarrow{MI} = \left(-\frac{m^2}{4}; -\frac{m}{2}\right)$

$\overrightarrow{KF} = (2; -m)$

Suy ra : $\overrightarrow{MI} \cdot \overrightarrow{KF} = -\frac{m^2}{2} + \frac{m^2}{2} = 0 \Rightarrow MI \perp KF$

Tam giác KMF cân tại M (do MF = MK)

MI là đường cao nên là phân giác góc KMF.

CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Trong các mệnh đề sau, chọn mệnh đề sai:

(A) nếu ABCD là hình bình hành thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{CD}$ cùng phương;

(B) nếu ABCD là hình thoi thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương;

(C) nếu ABCD là hình thang cân thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương;

(D) nếu ABCD là hình chữ nhật thì $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{CD}$.

2. Điều kiện cần và đủ để hai vectơ $\vec{a}$ và $\vec{b}$ bằng nhau là:

(A) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ có độ dài bằng nhau

(B) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng độ dài và cùng phương

(C) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng gốc và có độ dài bằng nhau

(D) $\vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng và cùng độ dài

3. Cho ABCD là hình thang cân có hai đáy là AB và CD. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào sai?

(A) $|\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{BD}|$ (B) $\overrightarrow{AB} = k.\overrightarrow{DC}\ (k > 0)$

(C) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ (D) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$.

4. Cho hình bình hành ABCD có giao điểm hai đường chéo là O. Chọn mệnh đề sai:

(A) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = -(\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})$ (B) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD}$

(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ (D) $|\overrightarrow{OA}| + |\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| + |\overrightarrow{OD}|$

5. Điều kiện cần và đủ để ABCD là hình bình hành là:

(A) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

(B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

(C) AB = CD và $\overrightarrow{AB}$ cùng hướng với $\overrightarrow{DC}$

(D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và A, B, C không thẳng hàng.

6. Điều kiện cần và đủ để ABCD là hình vuông là:

(A) $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CD}|$ (B) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$

(C) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ (D) $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AD}$.

7. Điều kiện nào sau đây là điều kiện cần và đủ để O là trung điểm của đoạn AB?

(A) OA = OB (B) $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \vec{0}$

(C) $\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OB}$ (D) $\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB} = 0$

8. Cho hình chữ nhật ABCD có giao điểm hai đường chéo là I. Chọn mệnh đề đúng:

(A) $\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IB}=\overrightarrow{IC}+\overrightarrow{ID}$ (B) $\overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IB}=0$

(C) $|\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$ (D) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}$

9. Cho bốn điểm A, B, C, D. Chọn mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$ (B) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{BC}$

(C) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BC}$ (D) $\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{CD}$

10. Cho hai lực F_1 và F_2 hợp với nhau 1 góc 90^o và có cùng chung điểm đặt, $F_1 = 30(N)$; $F_2 = 40(N)$. Cường độ lực tổng hợp hai lực ấy là:

(A) 70(N) (B) 10(N) (C) 1200(N) (D) 50(N)

11. Cho tam giác ABC và một điểm I thoả: $\overrightarrow{IA}=\overrightarrow{IB}+\overrightarrow{IC}$. Trong các mệnh đề sau, chọn mệnh đề sai:

(A) ABIC là hình bình hành (B) $\overrightarrow{BI}+\overrightarrow{CI}+\overrightarrow{IA}=\vec{0}$

(C) $\overrightarrow{CI}=\overrightarrow{AB}$ (D) $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{BC}$

12. Cho tam giác ABC, D và E lần lượt là trung điểm của AB và AC. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $2\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{BC}$ (B) $\overrightarrow{AB}=2\overrightarrow{DB}$

(C) $\overrightarrow{AC}=2\overrightarrow{AE}$ (D) $\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

13. Cho tam giác ABC có G là trọng tâm. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}=3\overrightarrow{AG}$ (B) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\overrightarrow{GC}$

(C) $\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{BG}=2\overrightarrow{GA}$ (D) $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{CG}=\vec{0}$

14. Gọi G và G' lần lượt là trọng tâm của tam giác ABC và A'B'C'. Tìm x sao cho $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=x\overrightarrow{GG'}$.

(A) $\frac{1}{2}$ (B) 1 (C) 2 (D) 3

15. Cho tam giác ABC vuông tại A có $\hat{B}=60^o$; BC = 2a. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

(A) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=0$ (B) $\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BA}=a^2$ (C) $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}=3a^2$ (D) $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CB}=a^2$

16. Cho ABCD là hình vuông có cạnh bằng x. Tích vô hướng $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ bằng:

(A) x^2 (B) $\frac{1}{2}x^2$ (C) $\sqrt{2}\,x^2$ (D) $2x^2$

17. Cho hình chữ nhật ABCD có các cạnh AB = a và AD = 2a. Tích vô hướng $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$ là:

(A) $2a^2$ (B) $4a^2$ (C) $a^2\sqrt{2}$ (D) $a^2\sqrt{3}$

18. Trong mặt phẳng xOy, cho các điểm A(2; 1); B(7; 2) và C(1; 6). Góc $\widehat{BAC}$ bằng bao nhiêu ?

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 90°

19. Trong mặt phẳng Oxy cho các điểm A(1; –6) ; B(13; 4) ; C(10; –2). Tính tích vô hướng của $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB}$.

(A) –49 (B) –51 (C) –53 (D) –55

20. Trong mặt phẳng Oxy cho A(–1; 1); B(3; 4) và C(11; –4). Xét tam giác ABC, tính cosA.

(A) $\frac{33}{65}$ (B) $\frac{31}{57}$ (C) $\frac{29}{65}$ (D) $\frac{37}{65}$

21. Cho tam giác vuông tại A, đường cao AH. Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) $AH^2 = HB.HC$ (B) $AH.BC = AB.AC$

(C) $\frac{1}{AH^2} = \frac{1}{HB^2} + \frac{1}{HC^2}$ (D) $AB^2 = BH.BC$

22. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường cao AH. Cho AB = 3 và AC = 4. Độ dài HC là:

(A) 3,2 (B) 3,4 (C) 3,6 (D) 3,8

23. Cho tam giác ABC vuông tại A, đường trung tuyến AM; BC = 16. Độ dài AM là:

(A) 12 (B) 8 (C) 6 (D) 4

24. Cho tam giác ABC có a = 6; c = 9; $\widehat{B} = 60^\circ$. Độ dài cạnh b bằng:

(A) $\sqrt{47}$ (B) 8 (C) $\sqrt{61}$ (D) $\sqrt{63}$

25. Cho tam giác ABC có a = 13; b = 14; c = 15. Góc B có giá trị là:

(A) 60° (B) 59°29' (C) 61°21' (D) 62°

26. Cho tam giác ABC có a = 7; c = 13 và $\widehat{C} = 120^\circ$. Độ dài cạnh b là:

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

27. Trong tam giác ABC, cos A được tính bằng công thức:

(A) $\sqrt{1-\sin^2 A}$ (B) cos(B + C)

(C) $\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ (D) $\frac{b^2+a^2-c^2}{2bc}$

28. Trong các công thức tính diện tích tam giác dưới đây, công thức nào sai:

(A) $S = \frac{1}{2}ab.\sin C$ (B) $S = \frac{abc}{4R}$

(C) $S = \frac{1}{2}b.h_b$ (D) $S = \frac{1}{2}p.r$

29. Cho tam giác ABC thoả mãn các hệ thức: $a^2 = b^2 + c^2$ và $c^2 = a^2 + b^2 - ab$. Góc B có giá trị là:

(A) 30^o (B) 45^o (C) 60^o (D) 75^o

30. Một tam giác ABC có ba cạnh là 13, 14, 15. Bán kính đường tròn nội tiếp r có giá trị là:

(A) 3 (B) 3,2 (C) 3,7 (D) 4

31. Cho tam giác có ba cạnh 30, 28, 26. Bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác là:

(A) 27,5 (B) 30 (C) 32,5 (D) 35

32. Gọi $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Với m_a, m_b, m_c là độ dài ba đường trung tuyến trong tam giác ABC. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

(A) $S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$ (B) $S = (a^2 + b^2 + c^2)$

(C) $S = \frac{3}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$ (D) $S = \frac{1}{2}(a^2 + b^2 + c^2)$

33. Trong mặt phẳng Oxy, cho ba điểm A(2; 1); B(−3; −2) và C(−4; 0). Diện tích tam giác ABC là:

(A) $\frac{13}{2}$ (B) $\frac{13}{4}$ (C) $\frac{11}{2}$ (D) $\frac{11}{4}$

34. Trong tam giác ABC thoả mãn hệ thức a + b = 2c. Trong các mệnh đề sau đây, mệnh đề nào đúng?

(A) sinA + sinB = 2sinC (B) sinA + sinB = sinC

(C) sinA + cosB = 2sinC (D) cosA + cosB = 2cosC

35. Cho tam giác ABC có: a = 6; b = 4; $c = 2\sqrt{5}$. M là một điểm thuộc cạnh AB sao cho AM = 3. Độ dài CM là:

(A) $\frac{7}{2}$ (B) 4 (C) $\frac{9}{2}$ (D) 5

36. Cho tam giác ABC có AC = 6; AB = 8 và BC = 7; AD là đường phân giác trong góc A. Độ dài DB và DC lần lượt là:

(A) 4 và 3 (B) 3 và 4 (C) 5 và 2 (D) 2 và 5

37. Cho tam giác ABC có $\widehat{A} = 60^0$; b = 6 ; c = 8. Đường phân giác trong AD có độ dài:

(A) $\frac{14\sqrt{3}}{7}$ (B) $\frac{26\sqrt{3}}{7}$ (C) $\frac{19\sqrt{3}}{5}$ (D) $\frac{17\sqrt{3}}{5}$

38. Trong tam giác ABC, cot A có thể tính theo công thức nào dưới đây?

(A) $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$ (B) $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2S}$

(C) $\frac{b^2 + 2c^2 + a^2}{8S}$ (D) $\frac{b^2 + 2c^2 - a^2}{8S}$

39. Cho tam giác ABC thoả bc.cosA + ac.cosB + ab.cosC = a^2. Tam giác ABC là tam giác gì ?

(A) Tam giác đều (B) Tam giác cân

(C) Tam giác vuông (D) A, B, C đều sai.

40. Cho tam giác ABC có T = b.cosC + c.cosB ; T bằng:

(A) $\frac{1}{2}a$ (B) a^2 (C) $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ (D) a

41. Cho tam giác ABC có A(1; 3); B(7; 5) và C(−2; 4). Toạ độ trọng tâm G của tam giác ABC là:

(A) G(2; −4) (B) (−2; 4) (C) G(2; 4) (D) G(2; 5)

42. Cho ba điểm A(4; 5); B(2; 3) và C(4; 1). Toạ độ tâm I của đường tròn ngoại tiếp tam giác ABC là

(A) $I\left(2; \frac{3}{2}\right)$ (B) I(4; 3) (C) $I\left(\frac{10}{3}; 3\right)$ (D) I(10; 9)

43. Cho ba điểm A(3; 1); B(−1; −2) và C(3; −2). Chu vi tam giác ABC là:

(A) 12 (B) 11 (C) 10 (D) 9

44. Cho ba điểm A(3; 1); B(4; 7); C(−1; 2). Toạ độ điểm D để ABCD là hình bình hành là:

(A) (2; 4) (B) (−2; −4) (C) (−3; −3) (D) (3; 3).

45. Trong các điểm sau đây, điểm nào thuộc đường thẳng 3x − 4y + 5 = 0?

(A) (1; 4) (B) (2; 2) (C) (−5; −3) (D) (5; 5)

46. Phương trình đường thẳng qua hai điểm A(1; 2) và B(−3; 7) là:

(A) 2x + 3y − 8 = 0 (B) 5x + 4y − 13 = 0

(C) 4x + 3y − 10 = 0 (D) 4x + 5y − 14 = 0

47. Đường thẳng (d) qua A(2; 1) và song song với đường thẳng 2x − y + 4 = 0 là:

(A) $2x - y + 3 = 0$ (B) $2x - y + 6 = 0$

(C) $2x - y - 3 = 0$ (D) $x + 2y - 4 = 0$

48. Đường thẳng (d) là đường thẳng vuông góc với đường thẳng $2x + y - 1 = 0$ và hợp với hai trục toạ độ một tam giác có diện tích bằng 4 có phương trình là:

(A) $x - 2y - 2 = 0$ (B) $x - 2y + 4 = 0$

(C) $x - 2y - 4 = 0$ (D) Cả B và C.

49. Đường thẳng (d) song song với đường thẳng $2x + y - 10 = 0$ cắt Ox, Oy lần lượt tại A và B sao cho đoạn $AB = 2\sqrt{5}$. Đường thẳng (d) có phương trình là:

(A) $2x + y - 4 = 0$ (B) $2x + y + 4 = 0$

(C) $2x + y - 5 = 0$ (D) Cả A và B

50. Phương trình tham số của đường thẳng d là $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$. Phương trình tổng quát của (d) là:

(A) $2x - y - 7 = 0$ (B) $2x - y - 5 = 0$

(C) $2x + y - 1 = 0$ (D) $2x + y + 1 = 0$

51. Cho hai điểm A(2; 1) và B(–4; 7). Phương trình tổng quát của đường trung trực của đoạn AB là:

(A) $x + y - 3 = 0$ (B) $x - y + 5 = 0$

(C) $x - y - 5 = 0$ (D) $x + y + 5 = 0$

52. Góc giữa hai đường thẳng $2x + y + 3 = 0$ và $3x - y - 5 = 0$ là:

(A) 30° (B) 45° (C) 60° (D) 75°

53. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 4y - 20 = 0$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) (C) có tâm I(1; –2) (B) (C) có bán kính R = 5

(C) (C) đi qua A(4; 2) (D) (C) đi qua B(6; 2)

54. Phương trình đường tròn có tâm I(2; –1) và tiếp xúc với đường thẳng (Δ): $4x - 3y + 4 = 0$ có phương trình:

(A) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 3 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 9 = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

55. Cho hai đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

(C_2): $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$

Trong các mệnh đề sau, chọn mệnh đề đúng:

(A) (C_1) cắt (C_2) (B) (C_1) và (C_2) không có điểm chung

(C) (C_1) tiếp xúc trong với (C_2) (D) (C_1) tiếp xúc ngoài với (C_2).

56. Cho elip (E): $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ và cho các mệnh đề sau:

(I) (E) có tiêu điểm $F_1(-3;0)$ và $F_2(3;0)$

(II) (E) có đỉnh $A_1(-5;0)$ và $A_2(5;0)$

(III) (E) có độ dài trục nhỏ là 4

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng:

(A) (I) và (II) (B) (I) và (III)

(C) (II) và (III) (D) (I), (II) và (III)

57. Cho elip (E): $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$. Đường thẳng (d) qua F_2 và vuông góc với trục Ox cắt (E) tại A và B. Độ dài AB là:

(A) $\frac{5}{3}$ (B) $\frac{4}{3}$ (C) $\frac{8}{3}$ (D) $\frac{10}{3}$

58. Cho hypebol (H) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

(A) (H) có trục ảo là 6 (B) (H) có trục thực là 8

(C) (H) có tiêu cự là 10 (D) (H) có hai tiệm cận là $y=\pm\frac{4}{3}x$

59. Phương trình hypebol (H) có phương trình hai đường tiệm cận $y=\pm\frac{3}{2}x$ và độ dài trục thực là 12 là:

(A) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{16}=1$ (B) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{9}=1$

(C) $\frac{x^2}{36}-\frac{y^2}{25}=1$ (D) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

60. Cho parabol (P) $y^2=16x$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề sai:

(A) (P) có tiêu điểm F(4; 0)

(B) (P) có đường chuẩn $x=-4$

(C) (P) có trục đối xứng là trục Oy

(D) (P) nằm ở góc phần tư thứ I và IV

61. Cho hai điểm A(2; 1) và B(1; 2). Phương trình đường thẳng AB là:

(A) $x-2y=0$ (B) $2x+y-5=0$

(C) $x + y - 3 = 0$ (D) $2x - y + 3 = 0$.

62. Cho hai điểm A(3; 7) và B(–5; 1). Phương trình đường thẳng trung trực đoạn AB là:

(A) $3x - 4y - 8 = 0$ (B) $3x + 4y - 13 = 0$

(C) $4x - 3y + 16 = 0$ (D) $4x + 3y - 8 = 0$.

63. Cho A (1; 1) và đường thẳng (d): $4x + 3y - 2 = 0$.

Phương trình đường thẳng (d') qua A và song song với đường thẳng (d) là:

(A) $4x + 3y - 7 = 0$ (B) $3x - 4y + 1 = 0$

(C) $3x + 4y - 7 = 0$ (D) $4x - 3y - 1 = 0$.

64. Cho A(4; 7) và đường thẳng (d): $2x - 5y + 1 = 0$.

Phương trình đường thẳng (d') qua A và vuông góc với đường thẳng (d) là:

(A) $5x - 2y + 6 = 0$ (B) $2x - 5y + 27 = 0$

(C) $5x + 2y - 34 = 0$ (D) $2x + 5y - 43 = 0$.

65. Cho tam giác ABC có 3 cạnh: AB: $x + y + 1 = 0$; AC: $2x - y - 7 = 0$; BC = $3x + 2y - 5 = 0$.

Phương trình tham số của đường cao AH là:

(A) $\begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3 - 3t \end{cases}$ (B) $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

(C) $\begin{cases} x = 3 + 2t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ (D) $\begin{cases} x = -3 + 3t \\ y = 2 + 2t. \end{cases}$

66. Cho tam giác ABC có phương trình các cạnh AB và AC là:

AB: $2x + y - 8 = 0$ và AC: $x - 2y + 11 = 0$.

Đường cao AH vuông góc với trục hoành. Phương trình đường cao AH là:

(A) $x = 1$ (B) $y = 6$ (C) $x + 1 = 0$ (D) $y + 6 = 0$.

67. Chọn đường thẳng (d): $x - 2y = 0$ và điểm A(2; 6). Toạ độ hình chiếu A' của A trên (d) là:

(A) (10; 2) (B) (–4; –2) (C) (4; 2) (D) (2; 10).

68. Cho tam giác ABC có A(3; 7) và đường thẳng BC: $y - 1 = 0$. Phương trình đường thẳng đi qua trung điểm hai cạnh AB và AC là:

(A) $y + 3 = 0$ (B) $y + 4 = 0$ (C) $y - 4 = 0$ (D) $y - 3 = 0$.

69. Cho hai đường thẳng

$$(d_1)\begin{cases} x = -10 + t \\ y = t \end{cases} \text{ và } (d_2)\begin{cases} x = -4 + t \\ y = 3 + 2t \end{cases}$$

Toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là:

(A) (1; 9) (B) (−1; −9) (C) (9; −1) (D) (−1; 9).

70. Khoảng cách từ điểm M(4; 5) đến đường thẳng (d) $\begin{cases} x = 4t \\ y = 2 + 3t \end{cases}$ là:

(A) 5 (B) 0 (C) 12 (D) 1.

71. Góc của hai đường thẳng (d_1): 4x − 2y + 6 = 0 và $(d_2)\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = 1 + t \end{cases}$ là:

(A) 30^0 (B) 45^0 (C) 60^0 (D) 90^0.

72. Cho hai đường thẳng $(d_1)\begin{cases} x = -3 + 2t \\ y = 5 + t \end{cases}$ và $(d_2)\begin{cases} x = -7 + 4t \\ y = 4 + 2t. \end{cases}$

Ta có vị trí tương đối của (d_1) và (d_2) như sau:

(A) (d_1) cắt (d_2) (B) (d_1) // (d_2) (C) $(d_1) \equiv (d_2)$ (D) $(d_1) \perp (d_2)$.

73. Cho hai đường thẳng $(d_1)\begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 2 - nt \end{cases}$ và $(d_2)\begin{cases} x = 2 + t \\ y = -1 + mt. \end{cases}$

Khi $(d_1) \equiv (d_2)$ hoặc (d_1) // (d_2) giá trị của m và n là:

(A) n = 1; m = −3 (B) $n = \frac{-1}{2}$; $m = \frac{3}{2}$

(C) n = −1; m = 3 (D) A, B, C đều đúng.

74. Cho (d_1): 2x − 7(m − 1)y − m + 5 = 0

và (d_2): x − my + 2m + 10 = 0.

Để (d_1) cắt (d_2) tại một điểm trên trục hoành thì m phải bằng:

(A) 3 (B) −1 (C) −3 (D) 0.

75. Cho hai đường thẳng (d_1): 3x + 4y − 1 và (d_2): 5x + 12y − 2 = 0. Hai đường phân giác của (d_1) và (d_2) có phương trình là:

(A) 14x − 8y − 3 = 0 và 32x + 56y − 12 = 0

(B) 7x − 4y + 1 = 0 và 64x + 112y − 23 = 0

(C) 14x − 8y − 3 = 0 và 64x + 112y − 23 = 0

(D) 7x − 4y + 1 = 0 và 32x + 56y − 12 = 0.

76. Cho $(d_1): \sqrt{2}x - \sqrt{3}y - 5 = 0$ và $(d_2): (3 + \sqrt{2})x + (\sqrt{6} - \sqrt{3})y + 7 = 0$.

Góc của (d_1) và (d_2) là

(A) 30^0 (B) 45^0 (C) 60^0 (D) 75^0.

77. Phương trình nào sau đây là phương trình đường tròn?

(A) $x^2 + y^2 - 4x + 2y + 6 = 0$ (B) $x^2 + 4y^2 - 4y - 4 = 0$

(C) $x^2 + y^2 + x + y - 1 = 0$ (D) $4x^2 - 4y^2 + 2x + 7 = 0$.

78. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 2x + 6y + 1 = 0$. Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

(A) (C) có tâm $I(1; -3)$ (B) (C) có bán kính $R = 3$

(C) (C) đi qua $A(-2; -3)$ (D) (C) đi qua $B(2; -4)$.

79. Cho đường tròn (C): $x^2 + y^2 - 4x + 2y - 20 = 0$. Phương trình tiếp tuyến tại điểm $A(-1; 3)$ với (C) là:

(A) $3x - 4y + 15 = 0$ (B) $3x + 4y - 15 = 0$

(C) $3x - 4y - 15 = 0$ (D) $3x + 4y + 15 = 0$.

80. Cho $(C_m): x^2 + y^2 - 2mx + (2m+4)y + m(m+9) = 0$.

Với giá trị nào của m thì (C_m) là đường tròn:

(A) $1 < m < 4$ (B) $m < 1$ hay $m > 4$

(C) $1 \le m \le 4$ (D) $m \le 1$ hay $m \ge 4$.

81. Trong hệ trục Oxy cho hai điểm $A(-6; 0)$ và $B(0; 8)$. Đường tròn ngoại tiếp tam giác OAB là:

(A) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ (B) $x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x + 8y = 0$ (D) $x^2 + y^2 + 6x + 8y = 0$.

82. Cho $I(3; 2)$ và đường thẳng (Δ): $3x - 4y + 9 = 0$. Phương trình đường tròn có tâm I và tiếp xúc với (Δ) là:

(A) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$ (B) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 4 = 0$

(C) $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 12 = 0$ (D) $x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$.

83. Cho elip (E): $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$.

Mệnh đề nào sau đây sai?

(A) (E) có hai đỉnh $A_1(-2;0)$, $A_2(2;0)$;

(B) (E) có hai đỉnh $B_1(-3;0)$, $B_2(3;0)$;

(C) (E) có $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}$;

(D) (E) có trục lớn nằm trên Oy, trục nhỏ trên Ox.

84. Phương trình chính tắc của elip có hai đỉnh là $(0; 1)$ và $(0; -1)$ và hai tiêu điểm $(-2; 0)$ và $(2; 0)$ là:

(A) $x^2 + \frac{y^2}{5} = 1$ (B) $x^2 + \frac{y^2}{9} = 1$

(C) $\frac{x^2}{5} + y^2 = 1$ (D) $\frac{x^2}{9} + y^2 = 1$.

85. Cho elip (E) có phương trình $3x^2 + 5y^2 = 30$. Đường thẳng (d) qua tiêu điểm F_2 của (E) và song song với trục tung cắt (E) tại A và B. Độ dài AB là:

(A) $\frac{10\sqrt{3}}{9}$ (B) $\frac{9\sqrt{3}}{10}$ (C) $\frac{5\sqrt{10}}{6}$ (D) $\frac{6\sqrt{10}}{5}$.

86. Cho elip (E) có phương trình tham số: $\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = \sin t \end{cases}$.

Phương trình chính tắc của elip là:

(A) $\frac{x^2}{5} + \frac{y^2}{4} = 1$ (B) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(C) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ (D) $25x^2 + 16y^2 = 144$.

87. Cho elip (E) có phương trình: $\frac{x}{a^2} + \frac{y}{b^2} = 1$ và có trục lớn trên trục hoành. M là một điểm tuỳ ý thuộc (E). Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau.

(A) $MF_1 + MF_2 = 2a$ (B) $MF_1^2 + MF_2^2 = 4a^2$

(C) $|MF_1 - MF_2| = 2a$ (D) $|MF_1^2 - MF_2^2| = 2a^2$.

88. Cho elip (E) có phương trình chính tắc: $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$

F_1, F_2 là hai tiêu điểm của (E); B_1 và B_2 là hai đỉnh trên trục nhỏ. Diện tích tam giác $B_1F_1F_2$ là:

(A) 16 (B) 9 (C) 24 (D) 12.

89. Cho elip (E): $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ và đường thẳng (d): $x - y + 3 = 0$. Số giao điểm của (d) và (E) là:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4

90. Cho đường tròn (C): $x^2+y^2=5$ và elip (E): $\frac{x^2}{5}+\frac{y^2}{4}=1$. Số giao điểm của (E) và (C) là:

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 4.

ĐÁP ÁN CÂU HỎI TRẮC NGHIỆM

1. Nếu ABCD là hình thang cân và có hai đáy là AB và CD thì $\overrightarrow{AB}$ và $\overrightarrow{DC}$ cùng phương. **Chọn C.**

2. $\vec{a}=\vec{b} \Leftrightarrow \vec{a}$ và $\vec{b}$ cùng hướng, cùng độ dài. **Chọn D.**

3. $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD} \neq \overrightarrow{AC}$. **Chọn C.**

4. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AC}$ và $\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{CA}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=-(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})$. **Chọn B.**

5. ABCD là hình bình hành $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và A, B, C không thẳng hàng. **Chọn D.**

6. $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$ và $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$ khi đó ABCD là hình bình hành có hai đường chéo vuông góc nên ABCD là hình vuông. **Chọn C.**

7. O là trung điểm của AB $\Leftrightarrow \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\vec{0}$. **Chọn B.**

8. AC = BD $\Leftrightarrow |\overrightarrow{AC}|=|\overrightarrow{BD}|$. **Chọn C.**

9. Ta có: $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{AD}$. **Chọn A.**

10. Ta có: $F^2 = F_1^2+F_2^2$ (theo Pi-ta-go)

$\Rightarrow F^2 = 30^2+40^2=50^2 \Rightarrow F = 50$. **Chọn D.**

11. ABIC là hình bình hành $\Rightarrow$ AI và BC là hai đường chéo

$\Rightarrow \overrightarrow{AI} \neq \overrightarrow{BC}$. **Chọn D.**

12. Ta có: $2\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BA} \Rightarrow \overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$. **Chọn D.**

13. Ta có: $3\overrightarrow{AG}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG})+(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{CG})+\overrightarrow{AG}$

$=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+(\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$. **Chọn A.**

14. Ta có: $\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG}+3\overrightarrow{GG'}=3\overrightarrow{GG'}$. **Chọn D.**

15. Ta có: $CA = a\sqrt{3}$ và $\hat{C}=30^0$

$\Rightarrow \overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = CA.CB.\cos C = a\sqrt{3}.2a.\frac{\sqrt{3}}{2}=3a^2$. **Chọn C.**

16. Ta có: $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = AB^2 = x^2$ (vì AB là hình chiếu của AC lên AB). **Chọn A.**

17. Ta có: $\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CB}.\overrightarrow{CB} = CB^2 = AD^2 = 4a^2$. **Chọn B.**

18. $\overrightarrow{AB} = (5; 1)$ và $\overrightarrow{AC} = (-1; 5) \Rightarrow \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC}$. Chọn D.

19. $\overrightarrow{CA} = (-9; -4)$; $\overrightarrow{CB} = (3; 6)$

$\overrightarrow{CA}.\overrightarrow{CB} = -9.3 - 4.6 = -51$. **Chọn B**

20. Ta có: $\overrightarrow{AB} = (4; 3)$ và $\overrightarrow{AC} = (12; -5)$

$\Rightarrow$ $AB = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$ và $AC = \sqrt{12^2 + (-5)^2} = 13$

$$\cos A = \frac{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}}{AB.AC} = \frac{(4.12) + 3.(-5)}{5.13} = \frac{33}{65}.$$ **Chọn A.**

21. Ta có: $\dfrac{1}{AH^2} = \dfrac{1}{AB^2} + \dfrac{1}{AC^2}$. **Chọn C.**

22. Ta có: $BC = 5$ và $HC = \dfrac{CA^2}{CB} = \dfrac{4^2}{5} = 3{,}2$. **Chọn A.**

23. Ta có: $AM = \dfrac{BC}{2}$ (theo định lí trung tuyến)

$\Rightarrow$ $AM = \dfrac{16}{2} = 8$. **Chọn B.**

24. $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac.\cos B = 6^2 + 9^2 - 2.6.9.\dfrac{1}{2}$

$b^2 = 63 \Rightarrow b = \sqrt{63}$. **Chọn D.**

25. $\cos B = \dfrac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = \dfrac{33}{65} \Rightarrow \hat{B} = 59^\circ 29'$. **Chọn B.**

26. $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos C$

$\Rightarrow$ $b^2 + 7b - 120 = 0 \Rightarrow b = 8$ hoặc $b = -15$

Vậy $b = 8$. **Chọn A.**

27. $\cos A = \dfrac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$ (theo định lí hàm côsin). **Chọn C.**

28. $S = p.r$. Chọn D.

29. $a^2 = b^2 + c^2 \Rightarrow A = 90^\circ$

$c^2 = a^2 + b^2 - ab \Rightarrow \cos C = \frac{1}{2} \Rightarrow C = 60^\circ \Rightarrow B = 30^\circ$. **Chọn A.**

30. $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 84$

$S = p.r \Rightarrow r = 4$. **Chọn D.**

31. Ta có: $p = \frac{30+28+26}{2} = 42$

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = 168$

$S = \frac{abc}{4R} \Rightarrow R = \frac{abc}{4R} = 32{,}5$. **Chọn C.**

32. $S = m_a^2 + m_b^2 + m_c^2$. Thay $m_a^2; m_b^2; m_c^2$ vào ta được

$S = \frac{3}{4}(a^2 + b^2 + c^2)$. **Chọn A.**

33. $\overrightarrow{AB} = (-5; -3)$ và $\overrightarrow{AC} = (-6; -1)$

$S = \frac{1}{2}\left\|\begin{matrix} -5 & -3 \\ -6 & -1 \end{matrix}\right\| = \frac{13}{2}$. **Chọn A.**

34. Ta có: $a + b = 2c \Rightarrow 2R\sin A + 2R\sin B = 4R\sin C$

$\Leftrightarrow \sin A + \sin B = 2\sin C$. **Chọn A.**

35. $a^2 = 36$; $b^2 = 16$; $c^2 = 20$

$\Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A $\Rightarrow CM^2 = AM^2 + AC^2 \Rightarrow CM = 5$. **Chọn D.**

36. Ta có: $\frac{AB}{AC} = \frac{DB}{DC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{4}{3}$ (1)

$DB + DC = BC = 7$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow DB = 4$; $DC = 3$. **Chọn A.**

37. $S_{ABC} = S_{ADB} + S_{ADC}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}.b.c.\sin 60^\circ = \frac{1}{2}.c.AD.\sin 30^\circ + \frac{1}{2}.b.AD.\sin 30^\circ$

$\Rightarrow AD = \frac{14\sqrt{3}}{7}$. **Chọn A.**

38. Ta có: $\cot A = \frac{\cos A}{\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc.\sin A} = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{4S}$. **Chọn A.**

39. Ta có: $\frac{b^2 + c^2 - a^2}{2} + \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2} = a^2$

$\Rightarrow a^2 = b^2 + c^2$. Tam giác ABC vuông tại A. **Chọn C.**

40. $b.\cos C + c.\cos B = \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2a} + \dfrac{a^2+c^2-b^2}{2a} = a$. **Chọn D.**

41. $x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{1+7-2}{3} = 2$

$y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{3+5+4}{3} = 4$. **Chọn C.**

42. Ta có: $IA^2 = IB^2 = IC^2$. Gọi $I(x; y)$ ta có:

$$\begin{cases}(x-4)^2+(y-5)^2=(x-2)^2+(y-3)^2\\(x-4)^2+(y-5)^2=(x-4)^2+(y-1)^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}x=4\\y=3\end{cases}.$$ **Chọn B.**

43. Ta có: AB = 5 ; AC = 3 ; BC = 4 ⇒ Chu vi = 5 + 3 + 4 = 12. **Chọn A.**

44. Ta phải có: $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \Rightarrow D(-2; -4)$. **Chọn B.**

45. Thay $x = 5$ và $y = 5$ vào, ta thấy thoả mãn phương trình. **Chọn D.**

46. Phương trình đường thẳng AB có dạng:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$$

$\Leftrightarrow \quad 5x + 4y - 13 = 0$. **Chọn B.**

47. Đường thẳng (d) có dạng $2x - y + c = 0$ qua $A(2; 1) \Rightarrow c = -3$. **Chọn C.**

48. Đường thẳng (d) có dạng $x - 2y + c = 0$ cắt hai trục toạ độ tại $(-c; 0)$ và $\left(0;\dfrac{c}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{1}{2}|-c|\left|\dfrac{c}{2}\right| = 4 \Rightarrow c^2 = 16$. **Chọn D.**

49. Đường thẳng (d) có dạng $2x + y + c = 0$ cắt trục Ox và Oy lần lượt tại $A\left(\dfrac{-c}{2};0\right)$ và $B(0; -c)$

$$\Rightarrow AB = \sqrt{\left(\frac{c}{2}\right)^2 + c^2} = 2\sqrt{5} \Rightarrow c^2 = 16 \Rightarrow c = \pm 4.$$ **Chọn D.**

50. $x = 2 + t \Rightarrow t = x - 2$ thay vào phương trình $y = -3 + 2t$ ta được:

$y = -3 + 2(x - 2) \Rightarrow 2x - y - 7 = 0$. **Chọn A.**

51. $r = \overrightarrow{AB} = (-6; 6)$. Trung điểm AB là $I(-1; 4)$

Phương trình đường thẳng $-6(x + 1) + 6(y - 4) = 0$

$\Rightarrow \quad x - y + 5 = 0$. **Chọn B**

52. $\overrightarrow{n_1} = (2; 1)$; $\overrightarrow{n_2} = (3; -1)$

$$\cos\left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right) = \frac{|2.3 + 1.(-1)|}{\sqrt{2^2+1^2}.\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \left(\overrightarrow{n_1};\overrightarrow{n_2}\right) = 45^\circ.$$ **Chọn B.**

53. Thay x = 6 ; y = 2 vào, ta nhận thấy cặp nghiệm này không thoả phương trình (C). **Chọn D.**

54. $$R = d(I/\Delta) = \frac{|8+3+4|}{\sqrt{4^2+3^2}} = 3$$

Phương trình (C): $(x-2)^2 + (y+1)^2 = 3^2$

$\Leftrightarrow \quad x^2 + y^2 - 4x + 2y - 4 = 0$. **Chọn B.**

55. (C_1) có tâm $I_1(-2; 1)$ và $R_1 = 3$

(C_2) có tâm $I_2(1; -3)$ và $R_2 = 2$

$I_1I_2 = 5 \Rightarrow I_1I_2 = R_1 + R_2 \Rightarrow (C_1)$ và (C_2) tiếp xúc ngoài. **Chọn D**

56. Ta có: b = 4 ⇒ độ dài trục nhỏ 2b = 8 ⇒ (III) sai. **Chọn A.**

57. Ta có: $C = \sqrt{9-4} = \sqrt{5} \Rightarrow F_2(\sqrt{5}; 0)$. Đường thẳng (d): $x = \sqrt{5}$

Thay vào (E) $\Rightarrow y = \pm\frac{4}{3}$

Vậy $A(\sqrt{5}; \frac{4}{3})$ và $B(\sqrt{5}; -\frac{4}{3}) \Rightarrow AB = \frac{8}{3}$. **Chọn C.**

58. (H) có hai đường tiệm cận $y = \pm\frac{b}{a}x$ hay $y = \pm\frac{3}{4}x$. **Chọn D.**

59. Ta có: $2a = 12 \quad \Rightarrow \quad a = 6$

$\frac{b}{a} = \frac{2}{3} \quad \Rightarrow \quad b = \frac{2a}{3} = 4$

(H): $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$. **Chọn A.**

60. (P) có phương trình $y^2 = 16x$ có trục Ox là trục đối xứng. **Chọn C.**

61. Chọn C vì:

Phương trình đường thẳng AB là:

$$(x - x_A)(y_B - y_A) - (y - y_A)(x_B - x_A) = 0$$

$$AB: (x-2)(2-1) - (y-1)(1-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad x + y - 3 = 0.$$

62. Chọn D vì:

Trung điểm I của đoạn AB có toạ độ là I(−1; 4).

Vectơ pháp tuyến của đường trung trực của đoạn AB là: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} = (-8; -6)$

Phương trình trung trực của AB là:

$$-8(x+1) - 6(y-4) = 0 \Leftrightarrow 4x + 3y - 8 = 0.$$

63. Chọn A vì:

Phương trình đường thẳng (d') có dạng:

$4x + 3y + c = 0$ qua $A(1; 1) \Rightarrow c = -7 \quad \Rightarrow \quad (d): 4x + 3y - 7 = 0$.

64. **Chọn C** vì:

VTPT $\vec{n}_{(d)} = (2;-5) \Rightarrow \vec{n}_{(d')} = (5;2)$

Phương trình (d') có dạng $5x + 2y + c = 0$ qua $A(4; 7)$, nên $c = -34$.

Vậy (d'): $5x + 2y - 34 = 0$.

65. **Chọn B** vì:

Toạ độ A là nghiệm của hệ $\begin{cases} AB: x + y + 1 = 0 \\ AC: 2x - y - 7 = 0. \end{cases}$

Vậy $A(2; -3)$.

Mà vectơ chỉ phương $\vec{u}_{AH} = \vec{n}_{BC} = (3;2)$ nên AH: $\begin{cases} x = 2 + 3t \\ y = -3 + 2t \end{cases}$

66. **Chọn A** vì:

Toạ độ $A(1; 6)$. Phương trình đường thẳng AH qua A và vuông góc với trục Ox có dạng $x = x_0$ hay $x = 1$.

67. **Chọn C** vì:

Phương trình đường thẳng (d') qua A và vuông góc với (d) là:

$2x + y - 10 = 0$ nên giao điểm của (d) và (d') là $A'(4; 2)$.

68. **Chọn C** vì:

Hình chiếu của A trên (BC) là $H(3; 1)$. Trung điểm của AH là $M(3; 4)$. Đường trung bình qua M và song song với cạnh BC có phương trình: $y = 4$ hay $y - 4 = 0$.

69. **Chọn D** vì:

Từ phương trình tham số, ta tìm được phương trình tổng quát của (d_1) là $x - y + 10 = 0$ và (d_2) là $2x - y + 11 = 0$.

Toạ độ giao điểm của (d_1) và (d_2) là: $(-1; 9)$.

70. **Chọn B** vì:

Ta nhận thấy $M \in (d)$ nên $d(M; d) = 0$.

71. **Chọn B** vì:

Vectơ pháp tuyến của (d_1) là: $\vec{n}_{d_1} = (4;-2)$

Vectơ chỉ phương của (d_2) là: $\vec{u}_{d_2} = (3;1)$, nên vectơ pháp tuyến của (d_2) là: $\vec{n}_{d_2} = (1;-3)$.

Ta có: $\cos(\widehat{d_1,d_2}) = \dfrac{|4.1+2.3|}{\sqrt{4^2+2^2}.\sqrt{1^2+3^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow (d_1;d_2) = 45^\circ$.

72. Chọn B vì: ta có: $(d_1): x - 2y + 13 = 0$ và $(d_2): x - 2y + 15 = 0$.

Vì $\dfrac{1}{1} = \dfrac{-2}{-2} \neq \dfrac{13}{15}$ nên $(d_1) // (d_2)$.

73. Chọn D vì:

Để $(d_1) \equiv (d_2)$ hoặc $(d_1) // (d_2)$ thì:

$\dfrac{1}{3} = \dfrac{-n}{m} \Rightarrow m = -3n$. Vậy cả A, B, C đều đúng.

74. Chọn C vì:

Để (d_1) cắt (d_2) tại một điểm (x; y) trên trục hoành thì $y = 0$.

Vậy $2x - m + 5 = 0$ và $x + 2m + 10 = 0 \Rightarrow m = -3$.

75. Chọn C vì:

Phương trình phân giác (d_1) và (d_2) là:

$$\frac{3x+4y-1}{\sqrt{3^2+4^2}} = \pm\frac{5x+12y-2}{\sqrt{5^2+12^2}}$$

Ta được hai đường thẳng:

$$14x - 8y - 3 = 0 \text{ và } 64x + 112y - 23 = 0$$

76. Chọn C vì:

$$\cos(\widehat{d_1,d_2}) = \frac{|\sqrt{2}.(3+\sqrt{2}) - \sqrt{3}(\sqrt{6}-\sqrt{3})|}{\sqrt{(\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2}.\sqrt{(3+\sqrt{2})^2+(\sqrt{6}-\sqrt{3})^2}} = \frac{1}{2}$$

$\Rightarrow \quad (\widehat{d_1,d_2}) = 60^\circ$.

77. Chọn C vì: $x^2+y^2+x+y-1=0$

$\Leftrightarrow \quad \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{2}$. Đây là phương trình đường tròn.

78. Chọn D vì:

Thay toạ độ của B(2; –4) vào phương trình của (C), ta có:

$$(2)^2+(-4)^2-2.2+6(-4)+1 = -3 \neq 0$$

$\Rightarrow$ B không thuộc đường tròn (C).

79. Chọn A vì:

$A \in (C)$, (C) có tâm I(2; –1) nên phương trình tiếp tuyến qua A(–1 ; 3)

và có vectơ pháp tuyến $\vec{n} = (3;-4)$ là: $3x - 4y + 15 = 0$.

80. Chọn B vì

Kiểm tra điều kiện: $a^2 + b^2 - c > 0$

$$\Leftrightarrow \qquad m^2 - 5m + 4 > 0 \Rightarrow m < 1 \text{ hay } m > 4.$$

81. Chọn B vì:

Tam giác OAB vuông tại O, tâm I của đường tròn (OAB) chính là trung điểm của AB nên $I(-3; 4)$, bán kính $R = IA = 5$.

Phương trình đường tròn (OAB) là:

$$(x+3)^2 + (y-4)^2 = 5^2 \Leftrightarrow \qquad x^2 + y^2 + 6x - 8y = 0.$$

82. Chọn A vì

Bán kính đường tròn $R = d(I, \Delta) = \dfrac{|3.3 - 4.2 + 9|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = 2.$

Phương trình đường tròn là: $x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0.$

83. Chọn B vì:

Ta có: $b^2 = 9 \Rightarrow b = 3$ nên $B_1(0; -3)$ và $B_2(0; 3)$.

84. Chọn C vì:

(E) có $c = 2; b = 1 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2 = 5$.

Suy ra (E): $\dfrac{x^2}{5} + y^2 = 1$.

85. Chọn D vì:

(E) có $a = \sqrt{10}$; $b = \sqrt{6} \Rightarrow c = 2$.

Vậy $F_2(2;0)$.

Phương trình đường thẳng (d) qua F_2 và song song với trục tung là:

$x = 2$ cắt (E) tại $A\left(2; \dfrac{3\sqrt{10}}{5}\right)$ và $B\left(2; \dfrac{-3\sqrt{10}}{5}\right)$.

Do đó $AB = \dfrac{6\sqrt{10}}{5}$.

86. Chọn C vì:

$$\begin{cases} x = 2\cos t \\ y = 3\sin t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos t = \dfrac{x}{2} \\ \sin t = \dfrac{y}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos^2 t = \dfrac{x^2}{4} \\ \sin^2 t = \dfrac{y^2}{9} \end{cases} \Rightarrow \text{(E)}: \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{y^2}{9} = 1.$$

87. Chọn A vì:

Theo định nghĩa của phương trình chính tắc của elip, ta có:

$$MF_1 + MF_2 = 2a.$$

88. Chọn D vì:

(E) có: $a = 5; b = 3 \Rightarrow c = 4$

$$F_1(-4;0) \text{ và } F_2(4;0) \Rightarrow F_1F_2 = 8$$

$$B_1O = 3 \Rightarrow S_{B_1F_1F_2} = \frac{1}{2}.B_1O.F_1F_2 = 12.$$

89. Chọn C vì:

Phương trình đường thẳng (d) có thể viết thành: $y = x + 3$. Vậy phương trình hoành độ giao điểm của (d) và (E) là:

$$\frac{x^2}{16} + \frac{(x+3)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow 5x^2 + 24x + 20 = 0$$

$\Delta' = 44 > 0 \Rightarrow$ (d) và (E) có 2 giao điểm.

90. Chọn C vì:

Phương trình (C) có thể viết thành: $y^2 = 5 - x^2$, thay vào (E) ta được:

$$\frac{x^2}{5} + \frac{5-x^2}{4} = 1 \quad \Leftrightarrow x^2 = 5 \Rightarrow x = \pm\sqrt{5}.$$

$$x = \sqrt{5} \Rightarrow y = 0$$

$$x = -\sqrt{5} \Rightarrow y = 0.$$

Như vậy (C) và (E) có 2 giao điểm.

Mục Lục

Lời nói đầu 3

Chương I. VECTƠ

§1. Các định nghĩa 5

§2. Tổng của hai vectơ 7

§3. Hiệu của hai vectơ 11

§4. Tích của vectơ với một số 14

§5. Trục tọa độ và hệ trục tọa độ 20

- *Bài tập ôn tập chương I* 26

Chương II. TÍCH VÔ HƯỚNG CỦA HAI VECTƠ VÀ ỨNG DỤNG

§1. Giá trị lượng giác của một góc bất kì (từ 0^0 đến 180^0) 33

§2. Tích vô hướng của hai vectơ 35

§3. Hệ thức lượng trong tam giác 42

- *Bài tập ôn tập chương II* 51

Chương III. PHƯƠNG PHÁP TOẠ ĐỘ TRONG MẶT PHẲNG

§1. Phương trình tổng quát của đường thẳng 60

§2. Phương trình tham số của đường thẳng 64

§3. Khoảng cách và góc 69

§4. Đường tròn 73

§5. Đường elip 78

§6. Đường hypebol 83

§7. Đường parabol 88

§8. Ba đường cônic 90

- *Bài tập ôn tập chương III* 92
- *Bài tập ôn tập cuối năm* 106
- *Câu hỏi trắc nghiệm* 115
- *Đáp án câu hỏi trắc nghiệm* 126

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI
16 Hàng Chuối - Hai Bà Trưng - Hà Nội
Điện thoại : (04) 3971 4896 - Fax : (04) 3971 4899

Chịu trách nhiệm xuất bản :

Giám đốc :	PHÙNG QUỐC BẢO
Tổng biên tập :	PHẠM THỊ TRÂM
Biên tập :	Hoàng Tiến - Thanh Tiến
Chế bản :	Diệu Tâm
Trình bày bìa :	Công ty Sách Hoa Hồng
Đối tác liên kết xuất bản :	Công ty Sách Hoa Hồng

GIẢI BÀI TẬP HÌNH HỌC 10 NÂNG CAO

Mã số: 1L-213ĐH2010
In 3.000 cuốn, khổ 16 × 24cm in tại Công ty CP In Tiền Giang.
Số xuất bản: 303-2010/CXB/44-55/ĐHQGHN, ngày 06/4/2010
Quyết định xuất bản số: 213LK-TN/XB.
In xong và nộp lưu chiểu quý II năm 2010.